様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月　５日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ０３４０４

研究課題名（和文）Pκλ上のイデアルの構造的性質と無限組合せ論

研究課題名（英文）Structural properties of ideals over P_{kappa}lambda and infinitary combinatorics

研究代表者
阿部　吉弘（Abe, Yoshihiro）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：１０１５９４５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：　弱いselectivityに関して研究し、Rudin-Keisler順序で非有界イデアルの上にnowhere P-pointイデアルが存在すること、Ｐκλの濃度がλならば、このイデアルはweak Q-pointであることを示した。また、local P-pointであることは、あるタイプのイデアルを含まないことと同値であることも示した。
　その上でsup-関数が1対1であるようなＰκλの定常部分集合について、その存在を導く組合せ論的原理を定義し、そのような集合が存在する強制モデルと存在しない強制モデルを構成した。また、非定常イデアルの制限の飽和度との関係も明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義
正則基数κ上のイデアルの構造的性質に関しては、既に1980年代に詳しく調べられていたが、Pκλ上のイデアルについては、過去2回の助成研究以前は殆ど結果らしいものはなかった。前々回で基本概念を定義し、強いselectivityに関しては前回の研究でかなりの事を明らかにできたが、弱いselectivityに関しては、手が付けられていなかった。今回、突破口となる結果がいくつか得られ、今後の進展に寄与すると思われる。
前回、多くの結果はsup-関数が1対1という仮定の下で得られていたが、そのような定常集合の存在について、無矛盾性の強さも含めて多数の事実を明らかにできたのは、高く評価されると自負している。

研究成果の概要（英文）：We study weak notions of selectivity and show that a nowher P-point exists above the bounded ideal in the Rudin-Keisler ordering. It is also proved that an ideal is not a local P-point if and only if it includes a certain type of ideals.
 About a stationary subet of P_{\kappa}\lambda on which the sup-function is one-to-one, we define a combinatorial principle which implies the existence of such a set and construct the forcing models where it exists and it does not exist. Relations between the saturation of the restriction of the non-stationary ideal and the existence of such a set is turned out.

研究分野：公理的集合論、特に巨大基数と無限組合せ論

キーワード：Pκλ　イデアル　P-point　Q-point　selective ideal　sup-関数　定常集合

１．研究開始当初の背景

正則基数κ上のイデアルの構造的性質（structural properties）は 1980 年代に詳しく調べられた（Baumgartner-Taylor-Wagon、[BTW] 1982）。しかし、$P_\kappa\lambda$上のイデアルについては長らく進展がなかった。本研究と同じ研究組織で行った平成 24 年度～平成 26 年度（「巨大基数を指向しない$P_\kappa\lambda$上のイデアル論」）及び、平成 27 年度～平成 29 年度助成研究（「$P_\kappa\lambda$上のイデアルの構造理論」）において基本的概念を定義し、非有界及び非定常という自然なイデアル間の関係のいくつかを明らかにした。さらに、Ulam イデアルに相当するイデアルを$P_\kappa\lambda$上に定義し、剛性（rigidity）に関する結果を得た。とは言え、κ上に比べると、未知な部分は余りに多い。特に、local P-points、local Q-points 等の弱い selectivity に関しては手つかずの状態であった。

２．研究の目的

$P_\kappa\lambda$上のイデアルの構造的性質を、特に local な性質に力点を置いて詳しく調べていく。また、これまで得た結果には、「sup－関数が 1 対 1」と仮定されている場合が多いが、どのような場合 sup－関数が 1 対 1 となるか、無矛盾性の強さも含めて考察する。研究過程で、$P_\kappa\lambda$の組合せ論に残された難問（非有界イデアルが関係する）を解決する手がかりを見つける。

３．研究の方法

指標となるκ上の結果（[BTW]）を参考にし、$P_\kappa\lambda$上の local P-point、local Q-point、イデアル間の Rudin-Keisler 順序、及び sup－関数が 1 対 1 となる定常集合の存在に考察の対象をしぼって研究を進めていった。

４．研究成果

本研究の舞台である$P_\kappa\lambda$とは、濃度がκ未満であるλの部分集合の全体$\{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$である。ここで、$\kappa$は正則基数、$\lambda$は$\kappa$以上の基数である。$P_\kappa\lambda$の濃度を$\lambda^{<\kappa}$で、最小のイデアルである非有界イデアルを$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$、最小の正規イデアルである非定常イデアルを$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}$で表す。

(1) Rudin-Keisler 順序に関して、次の結果を得た。$P_\kappa\lambda$上のイデアルIと関数$f: P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$に対して、$f_*(I) = \{X \subset P_\kappa\lambda : f^{-1}(X) \in I\}$とする。$P_\kappa\lambda$上のイデアル$I$と$J$の間に、$J = f_*(I)$の関係があるとき、$J \leq_{RK} I$とする（Rudin-Keisler 順序）。

①次の（i）～（iii）を満たすイデアルIが存在する。（i） $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \leq_{RK} I$。（ii）$I$ は nowhere P-point である。（iii）$P_\kappa\lambda$の非有界な部分集合の最小濃度が$\lambda^{<\kappa}$ならば、Iは weak Q-point である。

ここで、イデアルIが P-point であるとは、任意の$\alpha < \lambda$に対し$\{x \in P_\kappa\lambda : \alpha \notin f(x)\} \in I$である$f: P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$（$f$は$I$－fine）に対し、任意の$\alpha < \lambda$に対し$\{x \in X : \alpha \notin f(x)\} \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$かつ$P_\kappa\lambda \setminus X \in I$である$X$が存在するときを言う。この定義で、「$P_\kappa\lambda \setminus X \in I$」を「$X \notin I$」としたものが、local P-point の定義である。$I \restriction X = \{Y \subset P_\kappa\lambda : Y \cap X \in I\}$であり、どんな$X \notin I$ に対しても$I \restriction X$が P-point ではないとき、Iは nowhere P-point であると言う。

また、イデアルIが local Q-point であるとは、任意の$\alpha < \lambda$に対し$\{x \in X : \alpha \notin f(x)\} \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$である$f: P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$（$f$は$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$－fine）が、$X \notin I$ であるようなあるX上で 1 対 1 であるときを言う。任意の$X \notin I$ に対して$I \restriction X$が local Q-point であるとき、I は weak Q-point であると言う。

②$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ならば、任意の$P_\kappa\lambda$上のイデアル$I$に対し、次の（i）と（ii）を満たすイデアル$J$が存在する。（i）$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda} \subset J$。（ii）$I \leq_{RK} J$。この系として次が成り立つ：$I$と$J$ は$P_\kappa\lambda$ 上のイデアルで、$P_\kappa\lambda$がイデアルJに属さない$\lambda^{<\kappa}$個の互いに素な集合のユニオンであるとする。このとき、$J \subset K$で$I \leq_{RK} K$であるようなイデアルKが存在する。

(2) イデアルの直積を考え、次の結果を得た。$P_\kappa\lambda$上のイデアルIとJの直積$I \times J$を$X \in I \times J \Leftrightarrow \{x \in P_\kappa\lambda : \{y \in P_\kappa\lambda : (x, y) \in X\} \notin J\} \in I$で定める。このとき、次が成り立つ:

①$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \times \mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \subset f_*(I) \Leftrightarrow$全ての$\alpha, \beta < \lambda$に対し$\{x \in P_\kappa\lambda : (\alpha, \beta) \notin f(x)\} \in I$である。

②$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \times \mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \subset f_*(I)$ならば、$I$ は weakly selective ではなく、Q-point でもない。

ここで、任意のI-fine な関数fに対して、fがX上で 1 対 1 であるようなIに属さない集合Xが存在するとき、I は locally selective であると言い、任意の$X \notin I$に対し$I \restriction X$ が locally selective であるとき、I は weakly selective であると言う。

（３）P-point という概念は、関数$f: P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$を使って定義されているが、$P_\kappa\lambda$の分割を用いた特徴づけを行った。

①イデアルIが P-point であることと、次は同値である：任意の$\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset I$に対し、全ての$\alpha <$

また、I が local P-point であることと、次は同値である：任意の$\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset I$に対し、$A_\alpha \setminus B \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ かつ$P_\kappa\lambda \setminus B \notin I$であるような$B$が存在する。

②この系として、次の事実が得られる：

（i）I が weak P-point でλ^+-飽和でないならば、I に属さない$P_\kappa\lambda$の部分集合族$\{A_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$で任意の$\beta < \gamma < \lambda^+$に対し$A_\beta \cap A_\gamma \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$であるものが存在する。一般にイデアル$I$は、次が成り立

つときδ－飽和であると言う：Wの元は全てIに属さず、異なるWの要素の共通部分は必ずIに属すならば、$|W| < \delta$である。

（ii）$J_{\kappa,\lambda} \subset I$が weak P-point ならば、$I$は弱正規である。

（iii）$SNS_{\kappa,\lambda} \subset I$が weak P-point である⇔$I$は正規である。

ここで$J_{\kappa,\lambda}$は、「$X \in J_{\kappa,\lambda} \Leftrightarrow X$上のある選択関数$f$に対し、$x \in X: f(x) < \alpha\} \in I_{\kappa,\lambda}$がすべての$\alpha < \lambda$に対し成り立つ」で定義されるイデアルで、$SNS_{\kappa,\lambda}$は、「$X \in SNS_{\kappa,\lambda} \Leftrightarrow X$上のある選択関数$f$に対し、$f^{-1}(\{\alpha\}) \in I_{\kappa,\lambda}$がすべての$\alpha < \lambda$に対し成り立つ」で定義されるイデアルである。

（4）Local P-point であることが、あるタイプのイデアルを含まないことと同値なことを明らかにした。

①$P_\kappa\lambda$の互いに素な非有界集合による分割$\{A_s: s \in P_\kappa\lambda\}$に対し、イデアル$I$を次のように定める：

$$X \in I \Leftrightarrow \{s \in P_\kappa\lambda: X \cap A_s \notin I_{\kappa,\lambda}\} \in I_{\kappa,\lambda}$$

このとき、Iは local P-point ではない。

②Iが local P-point ではないならば、次のような$\{A_s: s \in P_\kappa\lambda\} \subset I$が存在する：

Jを$X \in J \Leftrightarrow \{s \in P_\kappa\lambda: X \cap A_s \notin I_{\kappa,\lambda}\} \in I_{\kappa,\lambda}$で定めると、$J \subset I$が成り立つ。

（5）その上で sup－関数が 1 対 1 である集合を、skinniest と言う。λが正則ではないとき、$P_\kappa\lambda$には skinniest な定常集合は存在しないこと、及び$2^\lambda = \lambda$かつ$\max\{\kappa, \mathrm{cof}(\lambda)^+\} \geq \omega_2$ならば、$P_\kappa\lambda^+$の skinniest な定常部分集合が存在することが知られている。以下に述べる概念を定義し、skinniest な定常集合の存在に関するいくつかの結果を得た。

$x \in P_\kappa\lambda$に対し、$\sup(x) \notin x$のとき$\sup^*(x) = \sup(x)$、$\sup(x) \in x$のとき$\sup^*(x)$は undefined とする。定常集合$X \subset P_\kappa\lambda$に対し、$E_X = \{\sup^*(x): x \in X\}$とし、$D_\lambda^M(X)$で次の主張を表す：以下の（i）、（ii）を満たす sequence $\langle b_\alpha | \alpha \in E_X \rangle$が存在する；（i）$b_\alpha \subset \alpha$、（ii）任意の$B \subset \lambda$に対し、$\{x \in X: B \cap \sup(x) = b_{\sup(x)}\} \notin NS_{\kappa,\lambda}$である。

①$D_\lambda^M(X)$が成り立つならば、Xは skinniest な定常部分集合をもつ。また、ZFC 集合論の最小モデルLでは、$P_\kappa\lambda$の任意の定常部分集合Xに対して$D_\lambda^M(X)$が成り立つ。従ってLでは、λが正則なとき$P_\kappa\lambda$の定常部分集合は全て skinniest な定常部分集合をもつ。

②λは正則で、δはλより大きい強到達不能基数とする。Lévi collapseで$\delta = \lambda^+$とした強制モデルでは、$P_\kappa\delta$の全ての定常部分集合Xに対して$D_\lambda^M(X)$が成り立ち、Xは skinniest な定常部分集合を持つ。

③λはκより大きい正則基数で、基数$\delta < \kappa^{+\kappa}$かつ$\delta \leq \lambda$であるとする。$I$が$P_\kappa\lambda$上の$\delta$－飽和な正規イデアルならば、$P_\kappa\lambda \setminus X \in I$であるような skinniest な定常部分集合$X$が存在する。

④λは正則で$\square(\lambda)$が成り立つとする。このとき、$P_\kappa\lambda$が skinniest な定常部分集合を持てば、$P_\kappa\lambda^+$にも skinniest な定常部分集合が存在する。ここで、$\square(\lambda)$とは次の組合せ論的主張である：次の（i）、（ii）を満たす sequence$\langle c_\alpha | \alpha < \lambda^+ \rangle$が存在する；（i）極限順序数$\alpha < \lambda^+$に対し、$c_\alpha$は$\alpha$の非有界閉部分集合である。（ii）$\beta$が$c_\alpha$の極限点ならば、$c_\beta = c_\alpha \cap \beta$である。

⑤λはκより大きい正則基数で、Sは$E_{<\kappa}^\lambda = \{\alpha < \lambda: \mathrm{cof}(\alpha) < \kappa\}$の定常部分集合とする。このとき、$NS_\lambda \restriction S$が$\lambda^+$－飽和ならば、$E_X \subset S$であるような$P_\kappa\lambda$の skinniest な定常部分集合は存在しない。ここでNS_λはλ上の非定常イデアルである。

⑥$\kappa \leq \mu < \lambda$は正則基数で、$2^{<\mu} = \mu$とする。このとき、ある強制モデルで次のことが成り立つ：$\bigcup_{\alpha<\mu} S_\alpha = E_{<\kappa}^\lambda$で、$E_x \subset S_\alpha$であるような$P_\kappa\lambda$の skinniest な定常部分集合が存在しないような sequence $\langle S_\alpha | \alpha < \mu \rangle$ が存在する。

＜引用文献＞

①J. E. Baumgartner, A. D. Taylor, and S. Wagon, *Structural properties of ideals,* Dissertationes Math. 197 (1982) [BTW].

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計14件（うち査読付論文　12件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

１．著者名 Toshimichi Usuba	４．巻 301
２．論文標題 A note on δ-strongly compact cardinals	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Topology and its applications	６．最初と最後の頁 107538
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.Topol.2020.107538	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Usuba Toshimichi	４．巻 64
２．論文標題 New combinatorial principle on singular cardinals and normal ideals	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Mathematical Logic Quarterly	６．最初と最後の頁 395～408
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/malq.201700024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yo Matsubara, Hiroshi Sakai, Toshimichi Usuba	４．巻 170
２．論文標題 On the existence of skinny stationary subsets	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic	６．最初と最後の頁 539-557
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.apal.2018.12.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計21件（うち招待講演　5件／うち国際学会　8件）

１．発表者名 阿部吉弘
２．発表標題 A condition for an ideal to be a P-poit
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2019年

１．発表者名 薄葉季路
２．発表標題 GCH at strongly compact cardinals
３．学会等名 日本数学会2019年度年会
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	薄葉　季路 (Usuba Toshimichi) (10513632)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	
研究分担者	南　裕明 (Minami Hiroaki) (70646885)	愛知学院大学・教養部・講師 (33902)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関