

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03406

研究課題名(和文) 様々な数理モデルの高次元臨界現象とクロスオーバーの厳密な解析

研究課題名(英文) Rigorous analysis for high-dimensional critical behavior and crossover phenomena in mathematical models

研究代表者

坂井 哲 (Sakai, Akira)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：50506996

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1)  $d$ 次元体心立方格子上的パーコレーションが $d=9$ で平均場臨界現象を示すことを証明した。予想されている $d=7$ には及ばないものの、標準的な $d$ 次元立方格子における上部臨界次元の現時点での最良評価 $d=11$ (Fitznerとvan der Hofstadによる2017年の結果)を凌駕した。(2) 2体相互作用係数が2体間距離の冪で減衰する長距離モデル(自己回避歩行、パーコレーション、イジング模型)に対し、特にその分散が対数発散する境界冪の場合に、上部臨界次元以上(等号込)で臨界2点関数の漸近挙動を解明した。これらの結果は、物理学者らが2014年に発表した予想を解決したものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) 或る次元 $dc$ より上では、臨界現象が平均場的なものに退化する。この $dc$ を上部臨界次元 $dc$ と呼ぶ。最近接パーコレーションでは $dc=6$ と予想されているが、超立方格子では $dc=10$ であることが示されていた。本研究は、標準的な最近接格子の一つである体心立方格子上一桁の次元 $dc=8$ まで降りることに成功した初めての結果である。

(2) 境界冪長距離モデルの場合、臨界2点関数の漸近挙動には(高次元でも)対数補正がつくものと予想されていたが、それを証明する解析手法がなかった。本研究では、対数補正つき冪関数どうしの畳み込み不等式を開発し、 $dc$ 直上まで平均場臨界現象に退化することを証明した初めての結果である。

研究成果の概要(英文)：(1) We prove that bond percolation on the  $d$ -dimensional body-centered cubic lattice exhibits mean-field behavior as soon as  $d=9$ . Although it is still away from the expected bound  $d=7$ , it is superior to the best-ever bound  $d=11$  for bond percolation on the  $d$ -dimensional hypercubic lattice, proven by Fitzner and van der Hofstad (2017).

(2) We prove that sufficiently spread-out long-range models of self-avoiding walk, percolation and the Ising model, which are defined by power-law decaying 2-body interactions (characterized by an exponent  $a$ ), exhibit mean-field behavior as soon as  $d$  is bigger than the model-dependent upper-critical dimension  $dc$  when  $a=2$ , and as soon as  $d=dc$  when  $a=2$ . This solves a conjecture in physics (2014).

研究分野：数学

キーワード：自己回避歩行 パーコレーション イジング模型 相転移 臨界現象 上部臨界次元 クロスオーバー現象 レース展開

## 1. 研究開始当初の背景

温度などの巨視的なパラメーターが変化したとき、系が質的に全く異なる状態に遷移する現象を相転移といい、その遷移が起こる際のパラメーター値を臨界点という。特に系の物差しである相関距離の発散を伴う臨界点付近では、様々な観測量が冪的な特異性を示し、マクロとミクロの区別がつかない。このような現象を臨界現象といい、その冪指数たちを臨界指数という。実は、臨界指数の値は系の詳細に依らず、次元や対称性など少数の要素だけで決まるという経験事実(臨界指数の普遍性)があり、そうしたことを数理モデルを用いて厳密に解明することは、確率論や統計力学の最重要課題の一つである。Werner(2006年)、Smirnov(2010年)、Duminil-Copin(2022年)に関連研究でフィールズ賞を受賞したことも記憶に新しい。

一方、次元 $d$ が十分高いとき、多くの数理モデルで臨界指数の値が相互作用のないモデルのそれに退化するものと信じられている。例えば、線形高分子の数理モデルである自己回避歩行の場合、体積排除効果のないモデルであるランダムウォークの臨界指数の値と高次元で一致する。このように退化した臨界現象を平均場臨界現象といい、非平均場的な様相とのクロスオーバーが起こる境界次元 $d_c$ を上部臨界次元という。

この「高次元で平均場臨界現象に退化する」という命題を数学的に厳密に証明できる希少な方法がレース展開である。Brydges と Spencer(1985年)が $\mathbf{Z}^{d>4}$ 上の弱自己回避歩行に対して考案して以来、様々な数理モデルに対して開発されてきた。中でも特に重要な結果が、Hara と Slade(1992年)による $\mathbf{Z}^{d\geq 5}$ 上の完全自己回避歩行(以下「完全」を省略)、Fitzner と van der Hofstad(2017年)による $\mathbf{Z}^{d\geq 11}$ 上のパーコレーション、本研究者(2007年)による $\mathbf{Z}^{d>4}$ 上の強磁性イジング模型(以下「強磁性」を省略)である。これら3つのモデルの $d_c$ の理論値はそれぞれ4, 6, 4であり、したがって $\mathbf{Z}^d$ 上の自己回避歩行については「全ての $d > d_c$ で平均場臨界現象に退化する」という命題がレース展開で完全に証明されていることになる。(距離 $1 \ll L < \infty$ 以下の点同士を繋ぐボンドを付加して $\mathbf{Z}^d$ を装飾した人工的な格子 $\mathbf{Z}_L^d$ 上では、パーコレーションやイジング模型でも全ての $d > d_c$ で平均場臨界現象に退化することが証明されている。)イジング模型や一部のスピン系については、 $\mathbf{Z}^d$ 上で「鏡映正値性」と呼ばれる強力な対称性が成り立つことにより、全ての $d > 4$ で平均場臨界現象に退化することが知られている。しかし、パーコレーションには鏡映正値性のような飛び道具は存在せず、 $7 \leq d \leq 10$ の臨界現象を解決することが長年の懸案であった。果たして、 $d \geq 7$ の最近接パーコレーションが平均場臨界現象を示すことを証明できるだろうか？

他方、 $\mathbf{Z}^d$ を完全グラフ化し、2体相互作用係数 $p_{x,y}$ (パーコレーションの場合、ボンド $\{x,y\} \subset \mathbf{Z}^d$ が開である確率に相当)によってモデルの定義を一般化することは可能だ。特に近年、 $p_{x,y}$ が $|x-y|^{-d-\alpha}$ のように減衰する長距離モデルへの関心が物理学者の間で高まっている(2014年)。本研究者と Chen(2015年)は、分散が発散する境界冪 $\alpha = 2$ でクロスオーバーが起こり、 $d_c$ の値が変わること(例えばイジング模型の場合、 $d_c = 4$ から $d_c = 2\alpha$ に下がる)、および $d > d_c$ における臨界2点関数の漸近挙動もNewton型からRiesz型に変わること等をレース展開を用いて証明した。しかし、解析の過程で $\alpha \neq 2$ であることを陽に用いたため、最も難しい境界冪 $\alpha = 2$ の場合は未解決のままであった。果たして、境界冪 $\alpha = 2$ 長距離モデルの高次元臨界現象は、 $\alpha > 2$ の様相に近いのか、それとも $\alpha < 2$ の様相に近いのか、どちらの様相とも違う特異なものなのだろうか？

上述のように均質な環境上で定義された数理モデルではなく、ランダムな環境上で定義されたモデルの相転移・臨界現象が再び重要視されるようになってきた。例えば、ランダムな媒質中の自己回避歩行の臨界点は、低次元では均質な媒質中での臨界点と異なる一方、高次元では一致する可能性が指摘されている(2016年)。それでは、ランダムな媒質中での臨界現象も、高次元では均質な媒質中での様相と一致するのだろうか。この問いに肯定的に答える十分条件が知られており、それを証明するためにレース展開を用いることが考えられる。レース展開から導かれる再生方程式は恒等式であるため、ランダムな媒質のような「並進対称性が成り立たない場合」であっても成立する。しかし、その展開係数を並進対称性なしで押さえる方法が確立しておらず、折角の再生方程式も絵に描いた餅と化してしまっていた。果たして、並進対称性を仮定しないレース展開の解析方法を確立し、ランダムな媒質中における自己回避歩行の高次元臨界現象を解明できるだろうか？

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、上述の3つの未解決問題

- (i) 最近接パーコレーションの臨界現象が平均場的なものに退化するための十分条件を比較的簡単に証明できる設定を考案し、 $d_c \leq 6$ を解決すること、
- (ii) 境界冪 $\alpha = 2$ 長距離モデルにおける臨界2点関数の漸近挙動を詳しく調べ、物理の予想(2014年)を解決すること、
- (iii) ランダム媒質中における自己回避歩行の高次元臨界現象を研究し、並進対称性のない状況でレース展開を解析する新しい方法を確立すること、

の解決を目指すことはもちろんだが、それと同時に、共通のキーワードであるレース展開が非常に強力な解析手法であることを広く知ってもらいたい。一般に臨界現象は、物理や化学、生物や社会現象にも見られる普遍的なテーマではあるが、確率論や組み合わせ論の重大な問題とも絡んでいる。臨界現象は無数の構成要素による協力現象であり、有限個の構成要素で近似したり、従来の確率論の技法(独立確率変数系やマルチンゲール等に対する解析方法)を使って捉えることができない。本研究に共通のキーワードであるレース展開は、高次元ながらも臨界現象を厳密に解析できる希少な(モデルによっては唯一の)方法である。海外ではレース展開の研究が市民権を得て、様々な問題で重要な結果を導き出している一方、日本では未だに手薄である。この現状を少しでも改善したい。

## 3. 研究の方法

全ての課題(i)~(iii)に共通するキーワードは、2点関数 $G(x, y)$ に対するレース展開である。例えば、自己回避歩行の場合、 $G(x, y)$ は $x$ と $y$ を繋ぐ自分自身と交わらない経路の母関数である。また、パーコレーションの場合、 $G(x, y)$ は開ボンダから成る経路(略して「開路」)で $x$ と $y$ が繋がる確率である。これらに対して、次の再生方程式およびその導出法をレース展開という。

$$G(x, y) = \delta_{x, y} + \Delta(x, y) + \sum_v (p_{x, v} + \Pi(x, v)) G(v, y)$$

ここで $\Delta(x, y)$ と $\Pi(x, y)$ は各モデルの相互作用に依存して決まる関数で、自己回避歩行の場合 $\Delta(x, y) = 0$ であり、 $\Pi(x, y)$ は交代級数(初項は自己回避ループの母関数、第2項は互いに回避し合う3本の自己回避歩行の母関数)である。レース展開の研究の核心は、十分高次元であれば、これら交代

級数のモーメントが臨界点直上でも絶対収束し、2 点関数  $G(x, y)$  をランダムウォークのグリーン関数 ( $\Delta(x, y) = \Pi(x, y) = 0$  の場合に相当) からの摂動と見做せる, というものである. したがって, 全ての課題でランダムウォークに関する評価が重要となる.

- (i) 自然な格子の代表格である「体心立方格子」を  $d$  次元に一般化した格子  $\mathbf{L}^d$  を考案した. その理由は,  $\mathbf{L}^d$  上のランダムウォークの諸量が簡単に評価でき, しかも比較的小さいことを示すことができるからだ. 例えば,  $\mathbf{L}^d$  上のランダムウォークの推移確率は, 各成分が独立な 1 次元ランダムウォークの推移確率の積に等しい. したがって, 熱核の裾野も Stirling 近似で精密に評価でき,  $\Delta(x, y)$  や  $\Pi(x, y)$  が相当小さいことを証明することができる. これらの特長を生かせば,  $\mathbf{Z}^d$  上のパーコレーションで得られている上部臨界次元の最良評価  $d_c \leq 10$  (2017 年) を凌駕することが期待できる.
- (ii) まず境界冪  $\alpha = 2$  におけるランダムウォークのグリーン関数が,  $d > 2$  において  $|x|^{2-d}/\log|x|$  の定数倍で減衰するという予想を解決した. この対数補正項により,  $d \geq d_c$  で「バブル条件」や「トライアングル条件」のランダムウォーク版が成り立つことが分かる. これらの条件は臨界現象が平均場的なものに退化するための十分条件なので,  $d \geq d_c$  の自己回避歩行やパーコレーションでも平均場臨界現象への退化が起こるものと期待できる. このことを厳密に証明するために, 展開係数  $\Delta(x, y)$  や  $\Pi(x, y)$  を評価するための対数補正つき冪関数同士の畳み込み不等式を整備する.
- (iii)  $\mathbf{Z}^d$  上の各最近接ボンドに独立同分布確率変数列  $\mathbf{X} = \{X_b\}$  を付与し,  $p_b = e^{-h-\beta X_b}$  とした自己回避歩行を考案した. ランダムな媒質  $\mathbf{X}$  には並進対称性がないため, 帯磁率  $\sum_y G_{\mathbf{X}}(x, y)$  は基準点  $x$  に依存して決まるのに対し, それが発散する臨界点  $h_c$  は確率 1 で  $x$  に依らない定数に集中することが知られている (2016 年). この一意に定まる臨界点直上での 2 点関数  $G_{\mathbf{X}}(x, y)$  の振る舞いをレース展開で解析する. 展開係数の評価に必要な劣加法性は, 並進対称性の有無に拘わらず成り立つが, その評価に登場する 2 点関数たちは互いに従属し合う確率変数であり, 並進対称性をもたない. そこで, ランダムウォークの個別グリーン関数に対する Barlow と Deuschel の評価 (2010 年) を参考に, まずは十分弱い環境  $0 < \beta \ll 1$  での解析を試みる.

#### 4. 研究成果

- (i) 目標の  $d_c \leq 6$  には届かなかったものの, Fitzner と van der Hofstad (2017 年) を凌駕する一桁の評価  $d_c \leq 8$  を達成することができた. その結果と今後の課題を纏めた Handa と Kamijima との共著が Taiwanese Journal of Mathematics **24** (2020 年) に掲載された. また, パーコレーションに関する現時点での最良結果を纏めた総説を執筆, 数学 **74** (2022 年) に掲載された.
- (ii) 広範囲パラメータを十分大きく取った境界冪  $\alpha = 2$  長距離モデルの臨界 2 点関数 (ランダムウォークのグリーン関数の場合は  $d > 2$ , パーコレーションの場合は  $d \geq 6$ , 自己回避歩行とイジング模型の場合は  $d \geq 4$ ) が漸近的に  $|x|^{2-d}/\log|x|$  の定数倍で減衰することを証明し, 物理の予想を解決した. その結果を纏めた Chen との共著が Communications in Mathematical Physics **372** (2019 年) に掲載された. また, その解析で難所となるところを平易に纏めた単著を執筆, RIMS 講究録別冊 **79** (2020 年) に掲載された. 加えて, イジング模型のレース展開係数のダイアグラム評価 (2007 年) に不備が見つかったため, その問題を解決, 単著論文が Communications in Mathematical Physics **392** (2022 年) に掲載された.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 坂井 哲	4. 巻 74
2. 論文標題 パーコレーションの数理2020	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 253 ~ 279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sakai Akira	4. 巻 392
2. 論文標題 Correct Bounds on the Ising Lace-Expansion Coefficients	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 783 ~ 823
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04354-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Handa Satoshi, Kamijima Yoshinori, Sakai Akira	4. 巻 24
2. 論文標題 A Survey on the Lace Expansion for the Nearest-neighbor Models on the BCC Lattice	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Taiwanese Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 723 ~ 784
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11650/tjm/190904	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 坂井 哲	4. 巻 B79
2. 論文標題 Crossover phenomena in the critical behavior for long-range models with power-law couplings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録別冊	6. 最初と最後の頁 51 ~ 62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sakai Akira, Slade Gordon	4. 巻 24
2. 論文標題 Spatial moments for high-dimensional critical contact process, oriented percolation and lattice trees	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/19-EJP327	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Chen Lung-Chi, Sakai Akira	4. 巻 372
2. 論文標題 Critical Two-Point Function for Long-Range Models with Power-Law Couplings: The Marginal Case for $d < d_c$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 543~572
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03385-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Handa Satoshi, Heydenreich Markus, Sakai Akira	4. 巻 1
2. 論文標題 Mean-Field Bound on the 1-Arm Exponent for Ising Ferromagnets in High Dimensions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Sojourns in Probability Theory and Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 183~198
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-15-0294-1_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計16件(うち招待講演 13件/うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Stability of the critical behavior of the Ising model against quantum perturbation
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields 2023(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 坂井 哲
2. 発表標題 Stability of the critical behavior of the Ising model against quantum perturbation
3. 学会等名 東京確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 坂井 哲
2. 発表標題 Stability of the phase transition and critical behavior of the Ising model against quantum perturbation
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Spread-out limit of the critical points for various statistical-mechanics models
3. 学会等名 Probability and Analysis on Random Structures and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Mixing time and simulated annealing for the stochastic cellular automata, and beyond
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 坂井 哲
2. 発表標題 Mixing time and simulated annealing for the stochastic cellular automata, and beyond
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Mixing time and simulated annealing for the stochastic cellular automata (SCA)
3. 学会等名 International Workshop on Microstructure-based Global Analysis and Its Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Finding optimal solutions by stochastic cellular automata
3. 学会等名 7th Wellington Workshop in Probability and Mathematical Statistics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Critical two-point function for long-range models with power-law couplings: The marginal case for $d = d_c$
3. 学会等名 The 12th MSJ-SI "Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Finding optimal solutions by stochastic cellular automata
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Finding optimal solutions by stochastic cellular automata
3. 学会等名 AIMaP 1-day Workshop (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Critical two-point function for long-range models with power-law couplings: The marginal case for $d = d_c$
3. 学会等名 University of Auckland Seminar in Statistics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Critical two-point function for long-range models with power-law couplings: The marginal case for $d = d_c$
3. 学会等名 17th International Symposium "Stochastic Analysis on Large-scale Interacting Systems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Critical two-point function for long-range models with power-law couplings: The marginal case for $d < d_c$
3. 学会等名 High-dimensional Critical Phenomena in Random Environments (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akira Sakai
2. 発表標題 Critical two-point function for long-range models with power-law couplings: The marginal case for $d < d_c$
3. 学会等名 2018 Spring Probability Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 坂井 哲
2. 発表標題 Hyperscaling for oriented percolation in 1+1 space-time dimensions
3. 学会等名 立教大学数理物理学研究センター第2回セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 The RIMS Workshop “Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics IV”	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 The RIMS Workshop “Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics III”	開催年 2021年～2021年

国際研究集会 The RIMS Workshop “Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics II”	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 The RIMS Workshop “Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics”	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	Durham University			
その他の国・地域	National Center for Theoretical Sciences			