

令和 4 年 6 月 8 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03410

研究課題名（和文）精度保証による力学系解析ツールの開発

研究課題名（英文）Development of analyzing tools of dynamical systems based on verified numerics

研究代表者

山本 野人（Yamamoto, Nobito）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：30210545

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、精度保証付き数値計算法に基づく力学系解析ツールを開発することであり、二つの目標を持つ。一つは、4次元以上の高次元力学系に対してホモクリニック軌道を精度保証によって行う方法を確立することである。もう一つは、非双曲型平衡点の近傍での力学系解析のためのツールを編み出すことである。

はじめの目標については、必要な精度保証技術を開発し、これを用いて4次元のホモクリニック軌道の存在を証明した。二つ目の目標についてはある程度の制約条件のもとで、非双曲型平衡点近傍でのLyapunov関数を構成する一般的な方法を導出した。これらについて研究論文を執筆し、学術雑誌に掲載された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

精度保証付き数値計算は、誤差の限界を提示しつつ計算する数値解析手法であるが、微分方程式等の解の存在を数学的に証明することも可能な計算機援用証明法の一つとも言える。これは理論的な研究発展のために適用されることが多い。本研究では、これを実際現象の解析につなげるためのステップとして、力学系と呼ばれる数学分野におけるツールとしての手法開発を行った。力学系は物理学や工学に幅広い応用範囲を持つ数学分野で、現象解析に欠かせないものである。これと精度保証法とを組み合わせることで、数学理論に詳しくない研究者であっても取り扱う現象の数理的な背景をよりよく理解するための道具を手に入れることが出来る、と考えられる。

研究成果の概要（英文）：Our aim is development of the methods based on verified numerics as tools for analysis of dynamical systems described by ODEs. Specifically we have two goals. One is to develop the method for proving the existence of homoclinic orbits in high dimension dynamical systems more than 4 degree, which should be carried out by verified numerics. The other is to establish tools for analysis of dynamical systems in the neighborhood of non-hyperbolic equilibria.

The results are reported in three articles which have been published in academic journals. The first and third ones are concerned with Lyapunov functions around non-hyperbolic equilibria, which indicate methods for two dimension dynamical systems especially with perturbation to Hamilton systems. The second one explains detailed mathematical setting for the numerical verification methods to prove the existence of homoclinic orbits and gives application examples including four dimension case.

研究分野：数値解析、精度保証付き数値計算、誤差解析

キーワード：数値解析 精度保証付き数値計算 力学系 Lyapunov関数 ホモクリニック軌道 非双曲型平衡点

## 1. 研究開始当初の背景

まず高次元力学系のホモ・ヘテロクリニック軌道の存在検証を精度保証法で行う研究の背景について記す。

ホモクリニック軌道を含むconnecting orbits に関する精度保証付き数値計算は大石による仕事に始まり、その後Arioli やKoch,Zgliczynski,Wilczakなどが多くの成果を残している。さらに、2011年ごろからは、Lessard らが解析的な手法をベースにしたホモクリニック軌道の精度保証付き数値計算法を考案し、彼らも多くの成果を挙げている。

Connecting orbits に関する精度保証法は、位相的な方法と解析的な方法の二種類に大別される。位相的な方法の代表例の一つは、Arioli によるcovering relationで、これは写像度の応用を含んでいる。解析的な方法の代表例は、Lessard らによるparameterization と radii polynomials を組み合わせた方法で、安定多様体や不安定多様体を陽に構成することで精度保証を実現している。この観点から考えると、写像度とLyapunov 関数を組み合わせた我々の試みは、両手法の特徴を含んでいる新しい手法の開発にあたりとみなし得る。

存在検証のための基本的な道具は、Brouwerの一致点定理および不動点定理である。これらを用いるためには、 $n$ 次元連続力学系を同定する $m$ 個のパラメータを指定し、 $m$ 次元パラメータ空間から $m$ 次元超平面への連続写像を力学系の軌道に沿って構成する必要があり、そのためには、いくつかの数学的な仮定が要請される。しかしながら、研究開始時点ではこれらが満たされていることを精度保証法で確認するための手法が存在しなかった。また、一致点定理の場合には写像度の確認が必要となる。これには既存の精度保証法の応用を考えていたが、写像の微分可能性をどう扱うかが不明であった。不動点定理の場合には、完全な縮小写像が得られないことがわかっているので、準Newton作用素を見出すことができるかどうかが焦点であった。

次に非双曲型平衡点の近傍解析の手法について述べる。研究開発当初では、これは困難な問題であることが知られていた。問題はいくつかのグループに分類される。

- (1) 非双曲ではあるが、比較的単純な力学系構造を持ち、特に中心多様体を持たないもの
- (2) 中心多様体を持たないが、ある程度複雑な構造を持つもの
- (3) 中心多様体を持つことがあらかじめわかっているハミルトン系など特定の力学系
- (4) 中心多様体を持つかどうか不明な一般の系のうち、何らかの条件を付与したもの

研究開始時点では(1)のケースについての準備を行っていた。特に、力学系軌道の特定の超平面への射影を考え、この超平面上でLyapunov関数とよく似た性質を持つ関数を二次形式で構成する方法について、ある一定の成果を得ていた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、精度保証付き数値計算法に基づく力学系解析ツールを開発することにある。力学系としては、ここでは主として常微分方程式で記述されるものを扱う。

本研究開始時に二つの目標を立てた。一つは、4次元以上の高次元力学系に対してホモクリニック軌道を精度保証によって行う方法を確立することである。もう一つは、非双曲型平衡点の近傍での力学系解析のためのツールを編み出すことである。

## 3. 研究の方法

本研究で開発するホモクリニック軌道の存在検証のための精度保証法は、Lyapunov 関数、精度保証付き数値計算によるODE の軌道計算、連続写像に対するBrouwer の一致点定理の組み合わせから構成されており、その枠組みは以下の通りである。

- (1) 扱う平衡点の安定多様体・不安定多様体の次元を確認する。
- (2) 扱う自励系ODEにパラメータを設定する。パラメータは自励系ODEの係数のうちから選択し、その数は不安定多様体の次元数と同じに取る。
- (3) 近似的なホモクリニック軌道を与えるパラメータを特定し、その値を含む小さなパラメータ領域を設定する。
- (4) 扱う平衡点の近傍で、精度保証を用いてLyapunov 関数を構成する。
- (5) 設定したパラメータ領域から不安定多様体への連続写像を構成し、その写像の値域の点からLyapunov関数の0レベルセット上の点を軌道計算により対応させることにより定まる連続写像を考える。
- (6) パラメータ領域と同じ次元で平衡点を含む部分集合を用意し、Lyapunov関数の0レベルセットからこの部分集合への射影を考える。

(7) 以上の写像を合成して、パラメータ領域から設定した部分集合への写像を構成する。この合成された連続写像が、同じ次元の空間の間の連続写像になることから、Brouwer の一致点定理を適用し、合成写像の像が平衡点を含むことを写像度の精度保証計算を通じて検証する。この検証が成功すれば、写像の構成法から、不安定多様体上の点から平衡点への解軌道が存在することになり、ホモクリニック軌道を与えるパラメータの存在が証明できる。

この研究のメインの部分は上述の手法の根拠を与える数学的な枠組みを整えることにある。

次に、非双曲型平衡点近傍における力学系解析の研究について述べる。ここでは、特にLyapunov関数の構成法の開発に焦点をあてる。

力学系の双曲型平衡点近傍においては、精度保証を用いてLyapunov関数を構成する一般的な方法が提案されている。一方、平衡点が非双曲型である場合、一般的な方法は確立されていない。そこで、二次元の問題に限定することで、一定の適用範囲を持つ方法の開発を目指す。その方針は以下のものとする。

1. 与えられた連続力学系（常微分方程式で記述されるもの）に適当な非線形変数変換を適用する。
2. 変換後の系で二次形式によるLyapunov関数 $L_f$ を構成する。
3.  $L_f$ に対し逆変換を施し、元の変数に戻した関数を $L$ とする。 $L$ が元の連続力学系に対するLyapunov関数になっていることを精度保証を用いて確認する。

第1のステップで行う非線形変数変換の決め方は力学系の理論で用いられている標準形変換から着想を得ている。本手法で鍵となるのは、適切な変数変換を見つけることができるかどうかである。これについても理論的な探求を行って一定の結論を得ることを目指す。

#### 4. 研究成果

はじめの目標については、そのベースの部分に、連続力学系の双曲型平衡点におけるLyapunov関数を精度保証付き数値計算により構成する方法を利用した。これは既存の方法ではあるが、精度保証による力学系解析の実際を提示する意味合いがあると考えている。これを基にして、Lyapunov関数を用いてホモクリニック軌道を検証する方法を構築し、二つの数値例によりその有用性を確認した。提案手法は既存手法と比べて、初等的な理論により構成されており、数学的に高度な議論を用いなくてもホモクリニック軌道の検証が行える可能性があることを示唆している。以上は学術論文としてまとめ、すでに学術雑誌のオープンアクセス論文として公開されている。

なお、提案手法では、平衡点がパラメータに関して変化しないということを仮定している。まだ数学的な議論が完全ではなく、この制限を取り払うことはできていないが、恐らくこの仮定は排除することが可能である。今後の展望としては、この制限を取り払い、パラメータに依存して変化する平衡点を持つ問題に対して本手法を適用したいと考えている。

つぎに、精度保証付き数値計算によるLyapunov関数構成の展開として、二次元連続力学系の非双曲型平衡点に関するLyapunov関数の構成法について研究を進めた。これは力学系における標準形理論から着想を得た非線形変換を利用しており、系の線形部分が特定の形をしている場合には、変数変換の次数を任意に上げることができると示した。これらの成果はふたつの論文に分けて発表し、学術雑誌に掲載されている。

非双曲型平衡点におけるLyapunov関数に関する今後の展望としては、高次の系に対するLyapunov関数の構成法を与えることが挙げられる。また、これはもはやLyapunov関数に関する展望ではないが、Lyapunov関数が構成できない系に対する精度保証付き数値計算による解析手法に関しても研究をすすめており、既にいくつかのケースについては結果が得られている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Gen Terasaka, Masao Nakamura, Koki Nitta, Nobito Yamamoto	4. 巻 12
2. 論文標題 Construction of local Lyapunov functions around non-hyperbolic equilibria by verified numerics for two dimensional cases	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 37-40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kaname Matsue, Tomohiro Hiwaki, Nobito Yamamoto	4. 巻 384
2. 論文標題 Errata to ‘ ‘On the construction of Lyapunov functions with computer assistance’ ’	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 113175
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Koki Nitta, Nobito Yamamoto, Kaname Matsue	4. 巻
2. 論文標題 A numerical verification method to specify homoclinic orbits as application of local Lyapunov functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-022-00502-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Koki Nitta, Toshiki Sasaki, Nobito Yamamoto	4. 巻 14
2. 論文標題 On numerical verification methods to construct local Lyapunov functions around non-hyperbolic equilibria for two-dimensional cases	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 33-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 新田光輝、山本野人
2. 発表標題 複素自励系の時間大域解に関する精度保証について
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 新田 光輝（電気通信大学）、笹木 俊希（電気通信大学）、山本 野人（電気通信大学）
2. 発表標題 非双曲型平衡点近傍でのLyapunov関数の数式処理・精度保証による構成
3. 学会等名 日本応用数理学会 2020年度 年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 新田 光輝（電気通信大学）、山本 野人（電気通信大学）
2. 発表標題 非双曲型平衡点近傍での Lyapunov 関数の精度保証法による構成について
3. 学会等名 2020 年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 皆本 啓吾（電気通信大学）、新田 光輝（電気通信大学）、山本 野人（電気通信大学）
2. 発表標題 離散力学系非双曲型不動点近傍でのLyapunov関数の精度保証による構成について
3. 学会等名 日本応用数理学会 第17回 研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 新田光輝 (電気通信大学), 山本野人 (電気通信大学)
2. 発表標題 局所 Lyapunov 関数を用いたホモクリニック軌道の精度保証について
3. 学会等名 数値解析シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 新田 光輝 (電気通信大学), 山本 野人 (電気通信大学), 松江 要 (九州大学)
2. 発表標題 局所Lyapunov関数を用いたホモクリニック軌道の精度保証法
3. 学会等名 2019年度日本応用数理学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本野人 (電気通信大学) 新田光輝 (電気通信大学)
2. 発表標題 ツールとしての精度保証技法 --- 局所Lyapunov関数の構成とその応用
3. 学会等名 RIMS研究集会：諸科学分野を結ぶ基礎学問としての数値解析学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村正男 (電気通信大学)、山本野人 (電気通信大学)
2. 発表標題 非双曲平衡点をもつ力学系に対するLyapunov関数の構成
3. 学会等名 第3回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (NVR 2019)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村 正男 (電気通信大学), 新田 光輝 (電気通信大学), 山本 野人 (電気通信大学)
2. 発表標題 非双曲型平衡点に対する局所Lyapunov関数の精度保証による構成
3. 学会等名 第16回 応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobito Yamamoto
2. 発表標題 On Lyapunov functions constructed by verified computation
3. 学会等名 EASIAM 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 寺坂 元, 中村 正男 新田 光輝, 山本 野人
2. 発表標題 非双曲型平衡点を持つ力学系におけるLyapunov関数の精度保証による構成について
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 新田 光輝, 山本 野人
2. 発表標題 精度保証付き数値計算による高次元力学系の安定・不安定多様体の捕捉について
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Koki Nitta and Nobito Yamamoto
2. 発表標題 On numerical verification of homoclinic orbits in high dimensional dynamical systems
3. 学会等名 SCAN2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 寺坂 元, 中村 正男, 山本 野人
2. 発表標題 非双曲型平衡点近傍におけるLyapunov関数の精度保証による構成
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 新田 光輝, 山本 野人
2. 発表標題 双曲型平衡点近傍の局所Lyapunov関数を用いたホモクリニック軌道の精度保証
3. 学会等名 応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------