

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 22 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03411

研究課題名(和文) 3次元領域におけるナビエ・ストークス方程式の解の計算機援用証明

研究課題名(英文) Computer-assisted proof for stationary solution existence of Navier-Stokes equation on 3D domain

研究代表者

劉 雪峰 (LIU, Xuefeng)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：50571220

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：ナビエ・ストークス方程式は流体力学の基礎方程式であり、方程式の解の存在と滑らかさに関する未解決問題はクレイ数学研究所の「ミレニアム懸賞問題」として、多くの研究者に知られている。この難問に挑むため、従来の解析手法以外に、計算機援用証明法という新たな計算法が発展している。1990年代、中尾充宏氏は2次元正方領域における流れの検証に成功し、この分野での先駆的な研究成果を挙げた。しかしながら当時の手法を3次元領域の問題に適用するとき、本質的な困難がある。本研究では、微分作用素の固有値評価法とストークス方程式の近似解の誤差評価の難題を解決し、世界初一般的な3次元領域における定常流れの検証に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、初めて3次元領域における流れの検証に成功した。検証した流れのレイノルズ数がまた小さいであるが、今後は、よりレイノルズ数の大きい流れに対する検証法の開発を目指している。また、本研究成果を基盤にして、定常の流れに限らず、初期値問題の流れの検証も構想している。したがって、本研究で提案した定常解の検証方法は「ミレニアム懸賞問題」の解決にも大きく寄与することが期待されている。

研究成果の概要(英文)：The existence and smoothness of the solution to the Navier-Stokes equation is an open problem that draws the attention of worldwide researchers. To investigate the solution property of the Navier-Stokes equation, the verified computation method has been newly developed in the past decades. In the 1990s, Nakao Mitsuhiro proposed the method to verify the solution over a 2D square domain. However, this method cannot be applied to the equation over 3D domains. This research proposes a general framework of rigorous eigenvalue estimation for differential operators and the error estimation for the Stokes equation. Such work enables a novel solution verification method for the Navier-Stokes equation over 3D domains.

研究分野：数値解析

キーワード：非線形偏微分方程式 有限要素法 精度保証付き数値計算 誤差評価 固有値問題 非圧縮条件 Hyper circle

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) 流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式は非線形偏微分方程式の一種であり、方程式に含まれる移流項によって解(流れ)の構造が極めて複雑になっている。ナビエ・ストークス方程式の解の存在と滑らかさに関する「ミレニアム懸賞問題」については、多くの数学者が関心を持ち、多様な数学的な解析法と計算法が検討されている。しかしながら現状では、我々の生活空間と同じである3次元空間の設定の場合、滑らかな初期条件の下であってさえも、方程式の解が安定であるかどうかは、数学的に解明されていない。

(2) 数値計算法で得られた方程式の近似解を利用し、流れの状態を解析することは可能であるが、計算過程で生じる離散化誤差、丸め誤差など様々な誤差があり、方程式に対する数学的に厳密な結論を導くのは大変困難である。近年、科学計算の分野では、計算中に生じる全ての誤差を厳密に評価する「精度保証付き数値計算法」が発展している。ただし、精度保証付き数値計算法を利用し、ナビエ・ストークス方程式の解を検証するとき、流れの非圧縮条件(divergence free)の厳密処理や、関連する微分作用素の固有値問題の厳密的な計算法など、極めて難しい課題が残されている。

(3) 1990年代、日本の数学研究者・中尾充宏氏は2次元正方形領域における定常流れの検証に成功し、この分野での先駆的な研究成果を得た。しかし、中尾氏の手法を3次元領域に適用する場合、ストークス方程式の境界値問題に対する近似解の事前誤差評価に本質的困難性があり、過去20年以上、3次元領域における流れの検証の研究は難航していた。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、ナビエ・ストークス方程式に対して、新たな有限要素法の計算法と厳密な誤差評価理論を発展させることで、これまでに扱うことのできなかった3次元領域におけるナビエ・ストークス方程式の解の計算機援用証明方法を開発することである。

3. 研究の方法

(1) 非線形方程式の解の検証においては、Newton-Kantorovichの定理の有効性が十分検証されている。本研究では、ナビエ・ストークス方程式にNewton-Kantorovichの定理を適用し、この定理に要求された「ストークス方程式の近似解の事前誤差評価」と「ストークス方程式に付随する微分作用素の固有値評価」という二つのコア課題を中心に、以下のように研究を展開した。

(2) **ストークス方程式の近似解の事前誤差評価** 研究代表者がポアソン方程式の境界値問題に対して提案したHypercircle法の事前誤差評価法を拡張させることによって、divergence-freeの制約条件が課されたストークス方程式の近似解の事前誤差評価を提案した[2]。特に、ストークス方程式の離散化式の特異性に対して、張氏のメッシュ分割方法を利用することで、安定的な計算法を得た。

(3) **ストークス方程式に付随する微分作用素の固有値評価** 3次元領域におけるストークス方程式の事前誤差評価[2]を利用し、2次元領域におけるストークス方程式の固有値問題に既に得られた固有値の評価法[6]を3次元領域に拡張した[1]。また、微分作用素の固有値評価の問題に対して、正定値双線形形式を利用した固有値の厳密評価法を、半正定値双線形形式で記述されたより一般的な固有問題に拡張し、高精度な固有値評価法を提案した[3, 4, 5]。

(4) **3次元領域におけるナビエ・ストークス方程式の解の検証** 上記の2つの課題の検討で構築した方法をベースにし、中尾氏の逆作用素のノルム評価法と合わせ、3次元領域におけるナビエ・ストークス方程式の解の検証法を提案した。この結果は2022年非線形科学分野のトップ3位の国際学術誌CNSNSに掲載された[1]。

4. 研究成果

(1) 1940年代、W. Prager氏とJ. L. Synge氏は、弾性力学の解析に関するHypercircle法を

提案した。Hypercircle 法は複数の関数空間に関わり、図 1 のように、ピタゴラスの定理のよう

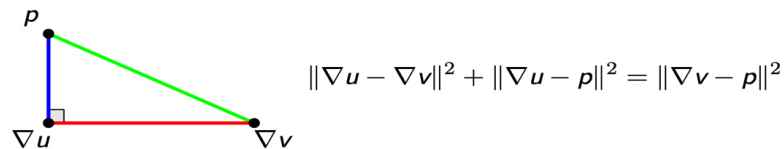


図 1: 関数解析に使用された Hypercircle

な美しい構造を持っている。また、同じ時期に、日本の数学者・加藤敏夫氏と藤田宏氏も Hypercircle 法と本質的に同じである手法を提案し、偏微分方程式の近似解の誤差評価に適用している。近年、Hypercircle 法は多くの数学者からも高い評価を受け、その手法の有用性が広く検討されている。2000 年代、菊地文雄氏も Hypercircle 法を利用し、有限要素法で得た偏微分方程式の近似解の事後誤差評価を提案した。

(2) 研究代表者の劉は菊地氏の手法を発展させ、それを有限要素法の近似解の事前誤差評価にも適用するというアイデアを得た。さらに、流れの非圧縮条件を処理するために、Hypercircle 法を拡張することで、ストークス方程式の境界値問題の有限要素解に対する事前誤差評価式を導いている [2]。この結果は汎用性に優れており、2 次元領域と 3 次元領域の流れの方程式に対しても自然に適用することができる。本研究では、Hypercircle 法を用いた誤差評価法と中尾氏の手法との融合によって、3 次元領域における定常流れの検証法を提案しその有効性を実証することができた [1]。

(3) 実際の検証例として、図 2 のような穴のある 3 次元領域における定常流れの検証例に成功した。純粋に理論的な手法によっても定常流れの解析はある程度可能であるが、本研究で報告した例では、既存の理論手法の適用条件が満たされず、単純な理論解析では流れの存在証明は困難である。したがって本検証例により、提案した計算機援用証明法の有用性が十分立証されたと言える。

(4) 本研究では、レイノルズ数が小さい流れの検証例が挙げられた。今後は、よりレイノルズ数の大きい流れに対する検証法の開発を目指す。また、本研究成果を基盤にして、定常の流れに限らず、初期値問題の流れの検証も構想している。したがって、本研究で提案した定常解の検証方法は「ミレニアム懸賞問題」の解決にも大きく寄与することが期待される。

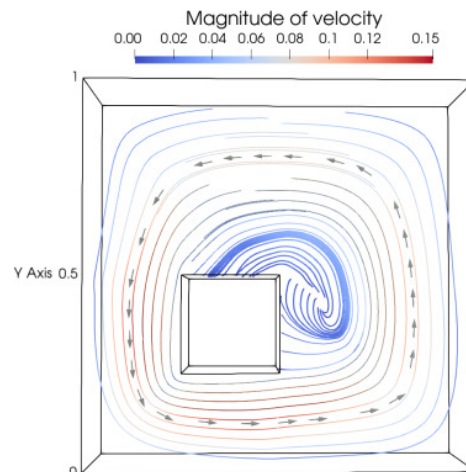


図 2: 論文 [1] に掲載した流れの検証例

<引用文献>

1. [Xuefeng LIU](#), Mitsuhiro T. NAKAO and Shin'ichi OISHI, Computer-assisted proof for the stationary solution existence of the Navier-Stokes equation over 3D domains, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 108, 106223, 2022.
2. [Xuefeng LIU](#), Mitsuhiro T. NAKAO, Chun'guang YOU and Shin'ichi OISHI, Explicit a posteriori and a priori error estimation for the finite element solution of Stokes equations, Japan J. Indust. Appl. Math. 38, 545-559, 2021.
3. [Xuefeng LIU](#), Explicit eigenvalue bounds of differential operators defined by symmetric positive semi-definite bilinear forms. Journal of Computational and Applied Mathematics, 371, 2020.
4. Chun'guang YOU, Hehu XIE and [Xuefeng LIU](#): Guaranteed eigenvalue bounds for the Steklov eigenvalue problem, accepted by SIAM J. Numer. Anal., 57(3), pp.1395-1410, 2019.
5. Shih-kang LIAO, Yuchen SHU and [Xuefeng LIU](#), Optimal estimation for the Fujino-Morley interpolation error constants, Japan Journal of Industry and Applied Mathematics, 36(2), pp. 521-542, 2019.
6. Manting XIE, Hehu XIE and [Xuefeng LIU](#): Explicit lower bounds for Stokes eigenvalue problems by using nonconforming finite elements, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 35, Issue 1, pp. 335-354, 2018.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Liu Xuefeng, Nakao Mitsuhiro T., You Chun ' guang, Oishi Shin ' ichi	4. 巻 38,
2. 論文標題 Explicit a posteriori and a priori error estimation for the finite element solution of Stokes equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 545 ~ 559
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-020-00449-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Liu Xuefeng	4. 巻 371
2. 論文標題 Explicit eigenvalue bounds of differential operators defined by symmetric positive semi-definite bilinear forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112666 ~ 112666
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112666	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 中野 泰河、劉 雪峰	4. 巻 29
2. 論文標題 有限要素解の定量的な局所事後誤差評価について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 362 ~ 382
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/jsiamt.29.4_362	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Liu Xuefeng	4. 巻 371
2. 論文標題 Explicit eigenvalue bounds of differential operators defined by symmetric positive semi-definite bilinear forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112666 ~ 112666
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112666	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Liao Shih-Kang, Shu Yu-Chen, Liu Xuefeng	4. 巻 36
2. 論文標題 Optimal estimation for the Fujino-Morley interpolation error constants	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 521 ~ 542
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00351-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 You Chun'guang, Xie Hehu, Liu Xuefeng	4. 巻 57
2. 論文標題 Guaranteed Eigenvalue Bounds for the Steklov Eigenvalue Problem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Numerical Analysis	6. 最初と最後の頁 1395 ~ 1410
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/18M1189592	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Li Qin, Liu Xuefeng	4. 巻 63
2. 論文標題 Explicit finite element error estimates for nonhomogeneous Neumann problems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applications of Mathematics	6. 最初と最後の頁 367 ~ 379
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21136/AM.2018.0095-18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Liu Xuefeng, Kikuchi Fumio	4. 巻 63
2. 論文標題 Explicit estimation of error constants appearing in non-conforming linear triangular finite element method	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applications of Mathematics	6. 最初と最後の頁 381 ~ 397
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21136/AM.2018.0097-18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Liu Xuefeng, Nakao Mitsuhiro T., Oishi Shin'ichi	4. 巻 108
2. 論文標題 Computer-assisted proof for the stationary solution existence of the Navier-Stokes equation over 3D domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation	6. 最初と最後の頁 106223 ~ 106223
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cnsns.2021.106223	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shao Wenbing, Chen Falai, Liu Xuefeng	4. 巻 147
2. 論文標題 Robust Algebraic Curve Intersections with Tolerance Control	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Computer-Aided Design	6. 最初と最後の頁 103236 ~ 103236
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cad.2022.103236	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計37件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous eigenvalue estimation of the Stokes differential operators and computer-assisted proof of the solution to the Navier-Stokes equation
3. 学会等名 International Workshop on Reliable Computing and Computer-Assisted Proofs (ReCAP 2022) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 凌輝
2. 発表標題 多角形領域におけるDirichlet固有値問題の形状最適化問題
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 ガリンド シェリーメイ
2. 発表標題 Maximum Norm Error Estimation for Boundary Value Problems
3. 学会等名 日本応用数学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中野 泰河
2. 発表標題 Poisson方程式の有限要素解に対する非一様メッシュによる局所誤差の収束挙動について
3. 学会等名 日本応用数学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中野 泰河
2. 発表標題 Helmholtz方程式の非斉次Neumann境界値問題に対する定量的な事後誤差評価
3. 学会等名 応用数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 ガリンド シェリーメイ
2. 発表標題 Verified computation for optimization problems with maximum norm constraint condition
3. 学会等名 応用数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 板の振動に関わる重調和作用素の厳密な固有値評価
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous eigenvalue estimation to the Stokes equation and its application to solution verification for Navier-Stokes equation
3. 学会等名 International Conference on Eigenvalue Problems and Related Topics (Beijing) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 境界値問題の近似解の各点誤差評価
3. 学会等名 応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 Navier-Stokes方程式の定常解の検証における若干の問題
3. 学会等名 応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 邵 文炳
2. 発表標題 平面における曲線の位置関係の厳密計算法
3. 学会等名 応用数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Galindo Shirley Mae
2. 発表標題 Lagrange補間関数の最大値ノルム誤差評価
3. 学会等名 応用数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中野 泰河
2. 発表標題 Diracのデルタ関数を含む3次元境界値問題に対する高精度な有限要素解析
3. 学会等名 応用数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous error estimation for FEM solution to Stokes equation over 3D domain
3. 学会等名 Mathematics and Systems Science, CAS (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Solution verification for the stationary Navier-Stokes equation over bounded nonconvex 3D domain
3. 学会等名 CRM CAMP in Nonlinear Analysis, Centre de Recherches Mathematiques, Canada (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 微分作用素の固有関数の誤差評価と形状最適化への応用
3. 学会等名 日本応用数学会2021年研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 3次元領域におけるNavier-Stokes方程式の解の検証ライブラリの開発
3. 学会等名 日本応用数学会2021年研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中野 泰河
2. 発表標題 非凸領域における境界値問題に対する局所誤差評価
3. 学会等名 日本応用数学会2021年研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous numerical computation and computer-assisted proof for the Navier--Stokes equation
3. 学会等名 The Third Conference on Scientific and Engineering Computing for Young Chinese Scientists (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nakano Taiga, Xuefeng LIU
2. 発表標題 Explicit local error estimation for FEM solutions
3. 学会等名 EASIAM2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous eigenvalue estimation and its application in computer-assisted solution proof for the Navier-Stokes equation
3. 学会等名 MAFELAP (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Computer-assisted proof for the stationary solution existence of the Navier-Stokes equation
3. 学会等名 ICIAM' 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Verified pointwise evaluation for Poisson's equation via hypercircle method
3. 学会等名 Mini-symposium on Verified Computing and Computer-Assisted Proof (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Explicit lower eigenvalue bounds of differential operators
3. 学会等名 Workshop of Numerical methods for spectral problems: theory and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nakano Taiga, Xuefeng LIU
2. 発表標題 Explicit a posteriori local error estimation for FEM solutions
3. 学会等名 Workshop of Numerical methods for spectral problems: theory and applications
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劉雪峰
2. 発表標題 アソン方程式の解の関数値に関する事後誤差評価
3. 学会等名 日本応用数理学会年会2019年年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中野 泰河, 劉 雪峰
2. 発表標題 有限要素解の局所事後誤差評価と応用について
3. 学会等名 日本応用数理学会年会2019年年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Pointwise error estimation for finite element solution to boundary value problems
3. 学会等名 日本数学会2019年秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中野 泰河, 劉 雪峰
2. 発表標題 Diracのデルタ関数を含む3次元境界値問題に対する有限要素解析
3. 学会等名 日本応用数理学会 2020年研究部会連合発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 邵 文炳, 劉 雪峰, 陳 発来
2. 発表標題 曲線の位置関係判定に関わる厳密計算法
3. 学会等名 日本応用数理学会 2020年研究部会連合発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Approach to the Stationary Solution Verification for the Navier-Stokes Equation in 3D Domain
3. 学会等名 SCAN2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 劉雪峰
2. 発表標題 3次元領域におけるNavier-Stokes 方程式の定常解の検証
3. 学会等名 日本応用数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 劉雪峰
2. 発表標題 Progress about computer-assisted proof for the stationary solution of Navier-Stokes equation
3. 学会等名 日本数学会2019 年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劉雪峰
2. 発表標題 微分作用素の固有ベクトルの厳密評価について
3. 学会等名 日本応用数学会第15 回研究部会連合発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劉雪峰
2. 発表標題 計算機援用証明によるラプラス作用素の固有値の最小化問題を考える
3. 学会等名 日本応用数理学会第15 回研究部会連合発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Guaranteed eigenvalue estimation for differential operators and its application in mathematical proof
3. 学会等名 BIRS Workshop: Spectral Geometry: Theory, Numerical Analysis and Applications (18w5090) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Guaranteed eigenvalue estimation for differential operators
3. 学会等名 Applications of Mathematics 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 大石 進一, 荻田 武史, 柏木 雅英, 劉 雪峰他	4. 発行年 2018年
2. 出版社 コロナ社	5. 総ページ数 311
3. 書名 精度保証付き数値計算の基礎	

〔産業財産権〕

〔その他〕

ナビエ・ストークス方程式の解の検証例のコード
<https://ganjin.online/xfliu/NS.SolutionVerification>
 Interpolation error constant computation library
https://github.com/xfliu/constant_estimation

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	田中 環 (Tanaka Tamaki) (10207110)	新潟大学・自然科学系・教授 (13101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Workshop of Numerical methods for spectral problems: theory and applications	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Karlsruhe Institute of Technology			
中国	Univ. of Sci. & Tech. of China			
中国	中国科学院・数学とシステム科学科学院	中国工程物理研究院高性能数值計算ソフトセンター	北京工商大学	
チェコ	チェコ科学院			
その他の国・地域	National Cheng Kung University, Taiwan			