

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03418

研究課題名（和文）非可積分系に対する厳密解とカオス的集合の実験数学的構成

研究課題名（英文）Exact solutions to non-integrable systems and experimental construction of chaotic sets

研究代表者

平出 耕一（Hiraide, Koichi）

愛媛大学・理学部・研究員

研究者番号：50181136

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：エノン写像の不動点が双曲型の場合に、付随する非線形差分方程式の解析解をラプラス・ポレル変換により構成し、安定（不安定）多様体を記述する解析関数を決定し、それらを計算機によって実現させた。ホモクリニック点を計算機によって求め、エノン写像のジュリア集合を2次元複素空間に実現させた。ラプラス・ポレル変換により構成した解析関数は、古典的な解析関数と本質的に一致することが計算機利用により判明した。このことの数学的証明は今後の課題として残されているが、カオス的な運動に係る解析関数の構成はとても容易となり、この成果は、不動点が放物型の場合や高次元の力学系の解析への適応が期待でき、それらは今後の課題となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

20世紀後半に盛んに研究された力学系理論は、定性的理論体系であり、その結果の多くが純粋数学の幾何学的または確率論的言葉により抽象的に記述されているが、本研究は、非線形の数理モデルの具体例である2次元のエノン写像に着目し、純粋数学と計算機実験を行き来しながら議論を進め、数量を計算機を用いて具体的に計算できる一つのアルゴリズムをに関するものである。具体的には、2階非線形差分方程式をポレル・ラプラス変換の方法により解き、新たな関数表示（すなわち積分表示）を求めることにより、力学系の不変量をより良い形で計算可能にした。最終的に、積分表示は必要なく形式的に関数表現が決定できることが分かり、意義は大きい。

研究成果の概要（英文）：In the case where fixed points of Henon maps are of hyperbolic type, analytic solutions to non-linear difference equations associated with them have been constructed in the method of Borel-Laplace transform, by which analytic functions describing stable (unstable) manifolds have determined and they have realized computationally in the real plane. the set of homoclinic points have calculated with high accuracy and the Julia sets have realized in the two-dimensional complex plane. On the other hand, it have been found that the obtained analytic functions by Borel-Laplace transform have been identical in numerical sense with the classical functions due to Poincare. Though the mathematical proof of that is not yet obtained, it has been found that the construction of analytic functions related with chaotic motions is quite simple, which means that this study may be applied to the case where the fixed points are of parabolic type, and furthermore to the higher dimensional dynamics.

研究分野：力学系理論

キーワード：非線形差分方程式 エノン写像の力学系 解析解 ホモクリニック軌道 ラプラス積分 ストレンジア
トクター

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

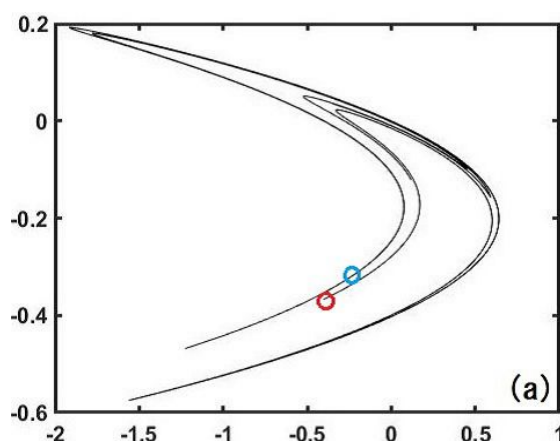
20 世紀後半に盛んに研究された力学系理論は、定性的理論体系であり、その結果の多くが純粋数学の幾何学的または確率論的言葉により抽象的に記述されている。

2. 研究の目的

この研究では、上記の研究を踏まえ、非線形の数理モデルの具体例である 2 次元のエノン写像に着目し、純粋数学と計算機実験を行き来しながら議論を進め、数量を計算機を用いて具体的に計算できるアルゴリズムを見出すという姿勢で、21 世紀に相応しい定量的研究を行い、新たな発見を目指すこと目的とした。

3. 研究の方法

力学系の挙動は、安定あるいは不安定多様体と呼ばれる集合を用いて記述されることが多い。本研究では、エノン写像から導かれる 2 階非線形差分方程式をボレル・ラプラス変換の方法により解き、安定 (不安定) 多様体の新たな関数表示 (すなわち積分表示) を求めることにより、エノン写像のエントロピー、リアプノフ指数などの数量を計算可能にする。非線形方程式をラプラス変換し、リーマン面を求めその特異点の形状を詳しく調べ、図に示すような複雑な曲線 (エノンのアトラクター (不安定多様体)) の積分表示およびその積分路を確定する

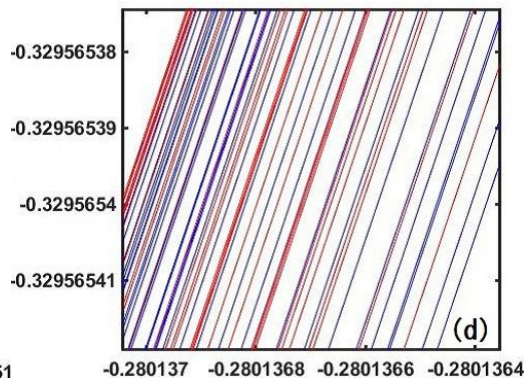
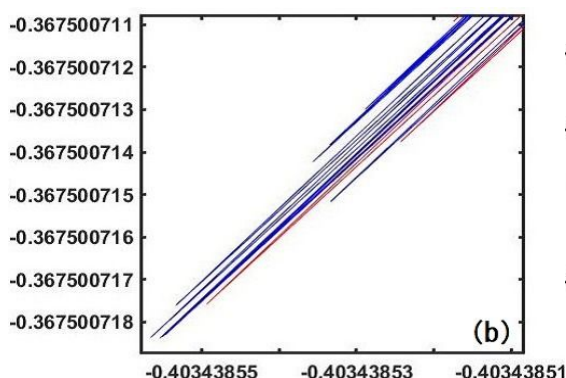


4. 研究成果

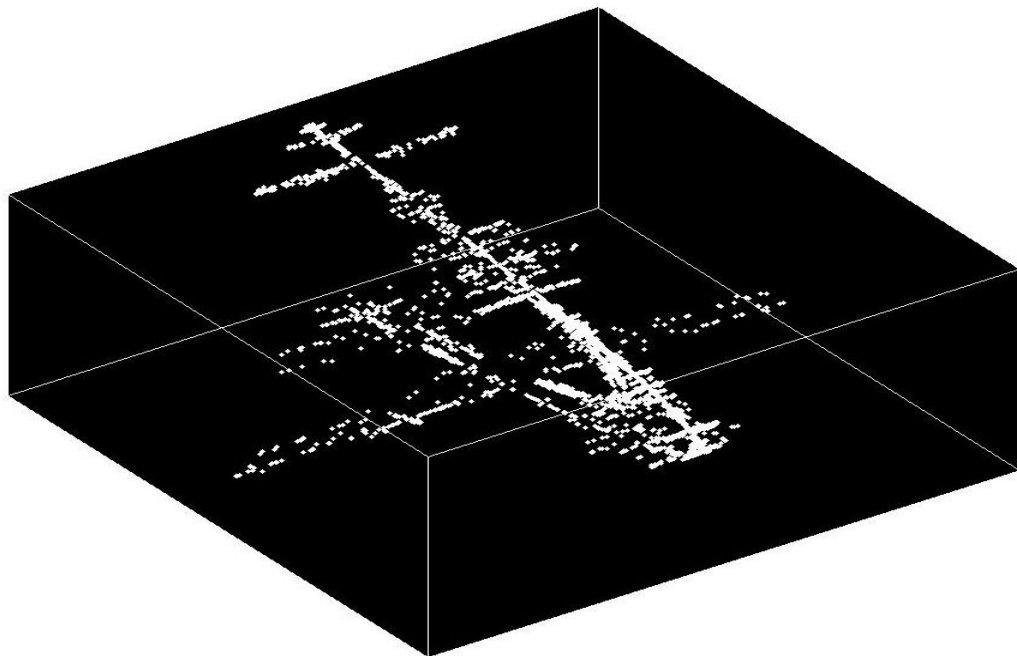
エノン写像の安定 (不安定) 多様体の積分表示が得られ、拡張された意味での非線形ストークス現象を発見できた。さらに、驚くべきことに、その積分表示の定積分を具体的に求めることができ、2 階非線形差分方程式の厳密解が次の様に得られた：

$$x(t + M) = \left[\frac{b_{0,1}}{t^2} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(N-1)! b_{N,N-1}}{t^N} e^{-(t+M)\zeta_N} \right] \left(1 + \frac{1}{t} \right)$$

これは、安定 (不安定) 多様体上の点の x 座標を 2 つのパラメータ t と M によって表示するものであり、y 座標についても同様に表示される。この表示を有限で打ち切った場合の誤差は、指数精度を超えていて、計算精度を著しく高くできる。また、右辺で t と M の役割を交換して類似の展開が得られるが、それはパリティ反転に対応する。下図は上図の細部の拡大図で今まで見たことのない細部構造が現れる。パリティに応じて 2 色で色分けして描かれている。上の厳密解の係数はすべて帰納的關係式により一意的に定まる重要な数であり、計算機を用いてそのすべての値を正確に求めることができる。



上記の結果を利用して、安定(不安定)多様体の交点を数多く高精度に求め、それらの点の集合、すなわちホモクリニック点集合を2次元複素空間に実現できた(次の図)。



この研究の最終段階で、上で述べたポレル・ラプラス変換による展開式は、ポアンカレによって古典的に知られている整関数と本質的に一致することが、計算機の利用によって分かった。このことを踏まえ、本研究の成果を、概要については数理解析研究所の講究録にすでに発表した。現在、詳細について国際誌に査読付き論文として発表する準備を進めている。一部は投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 平出耕一	4. 巻 2223
2. 論文標題 複素1次元多項式写像に対する正則運動の構成	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 75-87
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 平出耕一	4. 巻 2181
2. 論文標題 C2 のエノン写像の力学系に現れる非線形ストークス現象	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 134-144
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 2件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 平出耕一
2. 発表標題 複素1次元多項式写像に対する正則運動の構成
3. 学会等名 RIMS研究集会「力学系理論の最近の進展とその応用」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松岡千博、平出耕一
2. 発表標題 エノン写像に付随する非線形差分方程式の厳密解に対する急収束級数展開
3. 学会等名 2021年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 平出耕一
2. 発表標題 複素1次元の多項式写像に対する正則運動と双曲性
3. 学会等名 2020年度 冬の力学系研究集会 ; オンライン開催
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平出耕一, 松岡千博
2. 発表標題 複素エノン写像の力学系にあらわれる Stokes 的現象
3. 学会等名 2020年度日本数学会秋季総合分科会、無限可積分系、オンライン開催
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 平出耕一
2. 発表標題 C^2 のエノン写像の力学系に現れる非線形ストークス現象
3. 学会等名 RIMS 研究集会「数理学の諸問題と力学系理論の新展開」、オンライン開催
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 平出耕一, 松岡千博
2. 発表標題 複素エノン写像の力学系にあらわれるStokes的現象
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会、無限可積分系, 日本大学理工学部
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松岡千博, 平出耕一
2. 発表標題 不変複素曲線のLaplace 積分による漸近展開表現と古典的整関数表現の関係
3. 学会等名 2019年度冬の力学系研究集会, 日本大学軽井沢研修所
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松岡千博
2. 発表標題 Deterministic representation of chaotic attractors and capture of all homoclinic points in Henon map
3. 学会等名 3rd Asia-Pacific Conference on Plasma Physics, November 4-8, 2019, Hefei, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松岡千博
2. 発表標題 カオスの決定論的記述と未来予測
3. 学会等名 大阪市立大学第一学生ホール 2019. 10. 19 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平出耕一
2. 発表標題 正則運動の延長と双曲性
3. 学会等名 RIMS共同研究: 力学系—新たな理論と応用に向けて—, 京都大学, 2019年6月3日
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松岡千博, 平出 耕一
2. 発表標題 2次元力学系の不変曲線に対するBorel-Laplace変換による漸近展開表現 とカオスの集合 2
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 無限可積分系
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平出 耕一, 松岡 千博
2. 発表標題 2次元力学系の不変曲線に対するBorel-Laplace変換による漸近展開表現 とカオスの集合 1
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 無限可積分系
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松岡千博, 平出 耕一
2. 発表標題 Borel-Laplace変換による不変曲線の漸近展開表現の収束性
3. 学会等名 2018年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平出 耕一
2. 発表標題 Holomorphic motion and hyperbolicity in dimension one
3. 学会等名 2018年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平出 耕一
2. 発表標題 Special functions that appear in dynamical systems and their relationship with classical functions
3. 学会等名 Dynamical systems and related topics,2018 Internacional Congress of Mathematicians ; Satellite Meeting (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 平出 耕一
2. 発表標題 Jordan-like 分解に対する不変多様体について
3. 学会等名 RIMS共同研究 力学系－理論と応用の融合－
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松岡千博, 平出 耕一
2. 発表標題 非線形力学系に現れる特殊関数と古典的線形化関数との関係
3. 学会等名 RIMS共同研究 力学系－理論と応用の融合－
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	松岡 千博 (Matsuoka Chihiro) (10270266)	大阪公立大学・大学院工学研究科・教授 (24405)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------