

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03426

研究課題名（和文）複素数及び実数領域の代数制約式に対する効率的な限量子記号消去アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Development of efficient algorithms for complex and real algebraic constraints

研究代表者

佐藤 洋祐 (Sato, Yosuke)

東京理科大学・理学部第一部応用数学科・教授

研究者番号：50257820

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：パラメトリックな連立代数方程式の根の連続性についての重要な性質を証明した。これにより、パラメトリックな多項式環のイデアルによる飽和イデアルの計算をパラメーター空間の必要最小限の分割で行うことが可能になるので、飽和イデアルのシンプルな表現が可能になる。包括的グレブナー基底の代わりにパラメトリックなBorder基底を用いることで、パラメーター空間の必要最小限の分割が可能になることを証明した。非等式による飽和イデアルの計算を取り込むことで、パラメーター空間の分割が少なくさらによりシンプルなCGSが計算可能であることを理論的に証明した。これらの結果をもとに効率的な限量子記号消去アルゴリズムを開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

国立情報学研究所の東ロボ君プロジェクトで扱うような大学入試の問題をそれと等価な限量子記号消去の問題として代数制約式に表現したとき、既存の数式処理システムの限量子記号消去プログラムを用いても大抵の場合処理が可能である。しかしながら、国際数学オリンピックで出題されるような、より難易度の高い問題は等式制約を多く含む複雑な代数制約式として表現され、Mathematica や Maple 等の数式処理システムにおける既存の限量子記号消去プログラムでは処理できないものが多い。等式制約を多く含む代数制約式に対して有効な新しい限量子記号消去アルゴリズムを開発したことで処理できる問題の範囲が格段に広がった。

研究成果の概要（英文）：I proved an important property concerning continuity of the roots of a parametric system of algebraic equations. By this result, we can make a partition of the parameter space necessary for the computation of the saturation by parametric polynomial ideals. It enables us to have a simple representation of the saturation by parametric polynomial ideals. I further proved that we can have a simpler representation if we use a parametric border bases instead of comprehensive Groebner system. I also showed that we can have a simpler representation of a comprehensive Groebner system if we use the computation of the saturation ideal by disequalities. Based on those results, I developed efficient algorithms of quantifier elimination for both complex and real algebraic constraints.

研究分野：計算機代数

キーワード：CGS 根の連続性 パラメーター Border基底

1. 研究開始当初の背景

限量子記号消去 (Quantifier Elimination) とは、限量子記号 \forall や \exists を含んだ代数制約式から限量子記号とその束縛変数を取り除き、等価な式を求めることである。簡単な例をあげると、代数制約式 $X \in \mathbb{R} (X^2 + AX + B = 0)$ から限量子記号 \exists とその束縛変数 X を取り除き、等価な式 $A^2 - 4B \geq 0$ を求めることである。私は国立情報学研究所の人工知能プロジェクト「ロボットは東大に入れるか」において、数学チームのメンバーとして協力してきた。
(http://21robot.org/research_activities/math/)

大学入試で出題されるような問題をそれと等価な限量子記号消去の問題として代数制約式に表現したとき、既存の数式処理システムの限量子記号消去プログラムを用いても大抵の場合処理が可能である。しかしながら、国際数学オリンピックで出題されるような、より難易度の高い問題は等式制約を多く含む複雑な代数制約式として表現され、Mathematica や Maple 等の数式処理システムにおける既存の限量子記号消去プログラムでは処理できないものが多い。等式制約を多く含む代数制約式に対して有効な、新しい限量子記号消去アルゴリズムがどうしても必要になる。

2. 研究の目的

現在、ほとんどの数式処理システムの限量子記号消去プログラムでは、CAD アルゴリズムに基づいた実装がされている。高性能なアルゴリズムであるが、理論的な限界があることも知られており、扱える制約式は非常に限定される。本研究では、代数制約を多項式環のイデアルの問題として考えることで、グレブナー基底をはじめとする計算代数における斬新的なツールを用いて、効率的な限量子記号消去アルゴリズムを構築し、その有効性を検証することを目的とする。本研究の目的が達成されれば、数式処理による記号計算の適用可能範囲が拡大する。例えば、扱える工学の問題の範囲や数学教育における応用範囲等が格段に広がることになる。

3. 研究の方法

まずわれわれの複素数領域における限量子記号消去アルゴリズムをさらに改良する。

具体的には、包括的グレブナー基底系 (Comprehensive Gröbner System、以下 CGS と略記する) の計算だけでなく、パラメーターを含むイデアルの根基イデアルや各変数の最小多項式の計算を効率的におこなうアルゴリズムを構築し、それに基づいた改良をおこなう。その際、われわれが過去に得た CGS に関する知見が有用になると考えている。次に、等式を多く含むような実数領域の代数制約式に焦点を絞り、CGS の計算に基づいた効率的な限量子記号消去アルゴリズムの開発をおこなう。

実数領域における代数制約が等式制約式を多く含む場合に CAD アルゴリズムに基づく方法が有効でないのは、等式制約は基本的にイデアルの計算によって処理できるにもかかわらず、CAD アルゴリズムに基づく方法ではイデアルの構造を無視するためであるとわれわれは考えている。CGS の計算に基づいた効率的な限量子記号消去アルゴリズムを開発することにより、CAD アルゴリズムに基づいた既存の実装では扱えないような多くの問題が処理できるよう実装が可能になる。

本研究の目的が達成されれば、数式処理による記号計算の適用可能範囲が格段に広がることになる。

4. 研究成果

本研究では、パラメトリックな連立代数方程式の解の簡素な表現の実現とその効率的かつ高速な計算アルゴリズムの実現が重要な課題となっている。

2019 年度に、パラメトリックな連立代数方程式の根の連続性についての重要な性質を証明することに成功した。具体的には、連立代数方程式を構成する多項式が生成するイデアルが零次元で、かつイデアルの剰余環がなす線形空間の構造が不変であるような、パラメーターの空間において、連立代数方程式の根がパラメーターの関数として連続であることを証明した。この結果により、パラメトリックな多項式環におけるイデアルによる飽和イデアルの計算をパラメーター空間の必要最小限の分割で行うことが可能になるので、飽和イデアルのシンプルな表現が可能になる。しかしながら、イデアルの剰余環がなす線形空間の構造が不変であるような、パラメーターの空間の計算をどうやって行うかについての問題が解決されないままであったが、2020 年度までに、この問題を部分的に解決した。

イデアルが根基である場合は、CGS(包括的グレブナー基底)の代わりにパラメトリックな Border 基底を用いることで、パラメーター空間の必要最小限の分割が可能になることを証明した。さらに、パラメーター空間の分割ができるだけ少ないようなパラメトリックな Border 基底を効率的に計算するために、CGS のアルゴリズムの再評価をおこなった。具体的には、パラメーター空間の分割が少ない CGS を計算するための戦略をいくつか提案し、計算機代数システム SageMath 上でプログラムとして実装し計算機実験をおこない、これらの戦略が有効であることを確認した。しかしながら、研究は一步前進したものの、CGS に関して未解決であった問題を完全に解決するまでには至っていなかった。

2021 年度は、非等式による飽和イデアルの計算を取り込むことで、パラメーター空間の分割が少なくさらによりシンプルな CGS が計算可能であることを

理論的に証明した。非等式による飽和イデアルの計算を取り込むことで、パラメーター空間の分割が少なくさらによりシンプルな CGS が計算可能であることを

理論的に証明できたので、複素数及び実数領域の代数制約式に対するより効率的な限量子記号消去アルゴリズムの構築が可能になった。

2022 年度は、具体的なアルゴリズムを構築し、数式処理システム SageMath による実装を行い、アルゴリズムの有効性を実証した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Ryoya Fukasaku, Hidenao Iwane, Yosuke Sato	4. 巻 13
2. 論文標題 On Multivariate Hermitian Quadratic Forms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematics in Computer Science	6. 最初と最後の頁 79-93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11786-018-0387-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yosuke Sato, Hiroshi Sekigawa, Ryoya Fukasaku, Katsusuke Nabeshima	4. 巻 11989
2. 論文標題 On Parametric Border Bases	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 10-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-43120-4_2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sato Yosuke, Fukasaku Ryoya, Sekigawa Hiroshi	4. 巻 2018
2. 論文標題 On Continuity of the Roots of a Parametric Zero Dimensional Multivariate Polynomial Ideal	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 2018 ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation	6. 最初と最後の頁 359-365
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3208976.3209004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yosuke Sato, Ryoya Fukasaku, Katsusuke Nabeshima	4. 巻 2018
2. 論文標題 On Applications of Technology to Understanding Hierarchies of Elementary Geometry	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 23rd Asian Technology Conference in Mathematics	6. 最初と最後の頁 176-185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Fukasaku Ryoya, Iwane Hidenao, Sato Yosuke	4. 巻 -
2. 論文標題 On Multivariate Hermitian Quadratic Forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematics in Computer Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11786-018-0387-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 佐藤洋祐, 深作亮也, 関川浩	4. 巻 Vol. 25 No. 1
2. 論文標題 パラメトリックな連立代数方程式の根の連続性についてII	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数式処理	6. 最初と最後の頁 87-89
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計10件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Miwa Taniwaki, Yosuke Sato,
2. 発表標題 Some tips on the implementation of CGS in SageMath
3. 学会等名 26th International Conference on Applications of Computer Algebra (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 谷脇珠和, 佐藤洋祐
2. 発表標題 包括的グレブナー基底系の改良とSageMathへの実装
3. 学会等名 Risa/Asir Conference 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐藤洋祐、田村俊太郎
2. 発表標題 SageMathでのCGSの実装について
3. 学会等名 Risa/Asir Conference 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yosuke Sato, Hiroshi Sekigawa, Ryoya Fukasaku, Katsusuke Nabeshima
2. 発表標題 On Parametric Border Bases
3. 学会等名 MACIS2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤洋祐, 深作亮也, 関川浩
2. 発表標題 パラメトリックな連立代数方程式の根の連続性について II
3. 学会等名 日本数式処理学会第27回大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yosuke Sato, Ryoya Fukasaku, Hiroshi Sekigawa
2. 発表標題 A canonical representation of continuity of the roots of a parametric zero dimensional multi-variate polynomial ideal
3. 学会等名 24th Conference on Applications of Computer Algebra (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yosuke Sato,Ryoya Fukasaku,Hiroshi Sekigawa
2. 発表標題 On Continuity of the Roots of a Parametric Zero Dimensional Multivariate Polynomial Ideal
3. 学会等名 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤洋祐
2. 発表標題 初等幾何学の問題の階層付けとCASによる計算
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 共同研究(公開型) 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yosuke Sato
2. 発表標題 Hierarchies of Elementary geometry problems and their computation by CAS
3. 学会等名 International Workshop on Mathematical Softwares in Educations and Researches (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yosuke Sato, Ryoya Fukasaku, Katsusuke Nabeshima
2. 発表標題 On Applications of Technology to Understanding Hierarchies of Elementary Geometry
3. 学会等名 The 23rd Asian Technology Conference in Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------