

令和 3 年 6 月 18 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03428

研究課題名（和文）行列変量分布論の進化

研究課題名（英文）Extension of Matrix variate distribution

研究代表者

橋口 博樹（Hashiguchi, Hiroki）

東京理科大学・理学部第一部応用数学科・教授

研究者番号：50266920

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では、次の4つのテーマについて研究をおこなった。[テーマ 1] 多変量分布論で必要となる群作用で不変な多項式，特殊関数の統一化。[テーマ 2] 非特異行列変量の分布論から特異な場合への展開。[テーマ 3] 多変量正規母集団からの頑健性を旨とした発展。[テーマ 4] 量子化への展開。これら全てのテーマについて成果を公表することができた。4つのテーマは独立に展開できるものではなく、互いに補完しあって相乗効果によって成果を生んだものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム行列論は、数学的な興味にとどまらず、多変量解析、無線通信、複雑ネットワーク解析などの応用分野でも必要になる理論である。本研究では、特に、特異ランダム行列の正確分布の新しい理論を構築した。また、既存の研究としてある非特異なランダム行列論と、今回の新しい成果との共通点も見出すことができ、統一的に扱うことができることも発見できた。応用上の利点として、多変量解析では多変量分散分析でのロイ型検定統計量の分布の導出により解析条件の緩和や、MIMOの無線通信の理論では、入出力のアンテナの数の大小関係の制限を撤廃し、通信路容量を求めることが可能となったことなどが挙げられる。

研究成果の概要（英文）：In this research, we establish the following four themes. [Theme 1] Unification of polynomials and special functions that are invariant by a group action required in multivariate distribution theory. [Theme 2] Development of the theory of non-singular matrix variable distribution to the one of a singular case. [Theme 3] Development aimed at robustness from the normal to elliptical populations. [Theme 4] Development to quantization. We were able to publish the results on all these themes. The four themes cannot be divided into independently, but unified each other and produce results through synergistic effects.

研究分野：統計科学

キーワード：ランダム行列論 固有値 超幾何関数 ゾーナル多項式 特異行列

### 1. 研究開始当初の背景

多変量解析におけるランダム行列の歴史は Prof. Wishart らの 1930 年ごろの研究まで遡る。1960 年代の Prof. James の研究によって得られた直交行列やユニタリ行列で不変な多項式を用いることで、密度関数や分布関数、積率といった分布の基本的なものが求められ、ランダム行列の分布論の基礎が築かれた。多変量正規分布に関する共分散行列の分布論では、1960 年から 1990 年ごろまで実数に対する多変量解析の分布論が、次元がサンプルサイズよりも大きい場合(非特異ケース)で展開され多くの成果が生まれていた。情報技術の発展とともに統計科学が扱うデータの質や量も変化し、このような要請に応えるべく多変量解析の分布論も変化や拡張を続けている。実数のデータから複素数のデータへの転換で代表的なものは、信号処理や無線通信理論で扱う複素数データであり、特異ケース(次元がサンプルサイズよりも大きい場合)と呼ばれる例は、遺伝子データが典型的である。

このような背景の下、実多変量解析から複素多変量解析へ、さらには量子系多変量解析へと拡張するための理論を研究し、かつ、共分散行列の様々な様相に適用できるような、抽象的観点から統一的理論の構築を目指した。

### 2. 研究の目的

本研究では、共分散行列の新たな分布論の展開をめざす。統一化では、実数と複素数の多変量データ解析で統一的に扱える理論の構築を目指す。この統一的理論の枠組みをより発展させることによって、データの背後にある母集団分布の仮定を緩めるような頑健性を担保するための理論や、量子情報処理への橋渡しとなる共分散行列の分布論への拡張を目指す。研究代表者と分担者のこれまでの研究成果を基礎として、具体的に次の 4 つのテーマを設ける。

[テーマ 1] 多変量分布論で必要となる群作用で不変な多項式、特殊関数の統一化。

[テーマ 2] 非特異ランダム行列論から特異な場合への展開と統一化。

[テーマ 3] 多変量正規母集団からの頑健性を目指した発展。

[テーマ 4] 量子化への展開。

### 3. 研究の方法

[テーマ 1] 多変量分布論で必要となる群作用で不変な多項式、特殊関数の統一化

型ウィシャート行列(共分散行列)の分布の検討を行った。Edelman and Koev (2015), Dubbs et al. (2015) では、型のウィシャート分布が初めて導入された。パラメータ  $n$  を、 $n=2$  とすると実数の共分散行列の分布を扱うことができ、 $n=1$  で複素のエルミート型の共分散行列の分布を扱うことができる。さらに  $n=4$  で四元数へと発展できる。これらの論文を足がかりとして、実数の多変量解析で培われた多くの研究成果を統一パラメータ  $n$  の利用の下で、どのように拡張できるかという点は研究すべきテーマであると考えられる。また、実数の場合 ( $n=2$ ) や複素数の場合 ( $n=1$ ) には、母集団分布が多変量正規分布であって、共分散行列は多変量正規母集団からのサンプルからつくられるという明確なサンプリング構造があるが、 $n$  が他の値のときのサンプリング構造を明らかにしていく。

[テーマ 2] 非特異ランダム行列論から特異な場合への展開と統一化。

特異ウィシャート行列、共分散行列の分布の検討を行う。Srivastava (2003)では実ウィシャート行列の特異ケース、Ratnarajah and Vaillancourt (2005)では複素版のウィシャート行列の特異ケースを議論している。前者では、スティーフェル多様体上の積分で不変な多項式が存在が証明できていないため、特異行列の固有値分布を導出するには至っていない。他方、後者では、スティーフェル多様体上の積分で不変な多項式が存在を仮定して特異行列の固有値分布を導出している。このような不変多項式は存在を議論する。

[テーマ 3] 多変量正規母集団からの頑健性を目指した発展。

楕円母集団下でのウィシャート行列、共分散行列の分布の検討を行う。古典的な共分散行列の分布では、母集団に正規分布の仮定を置いて議論が進められてきた。正確な分布論は、数値計算向きの結果が得られず、サンプルサイズが大きい場合の大標本論(漸近論)や次元も大きくなるという高次元の理論、つまり、極限の分布の研究を行ってきている。一方で、近年、Caro-Lopera et al. (2014), Caro-Lopera et al. (2016) に見られるように正確な分布論も復活し、楕円母集団下での共分散行列の正確な分布を求めることが重要になってきている。分担者とも協力し、楕円母集団のもとでの正確な分布論を構築する。

[テーマ 4] 量子化への展開

実のゾーナル多項式から型ゾーナル多項式(ジャック多項式)への展開と量子化を基礎を築く。多変量解析の方法論は、音声認識、テキストマイニング、画像処理、そしてこれらのような学習理論に関連する情報処理分野で役立つが、量子情報処理の分野で多変量解析の方法論がどのように役立つかは明確ではない。変量解析の基本的な方法論としての分布論が量子情報処理の分野でどのように展開できるかを研究する。

#### 4. 研究成果

本研究で掲げた上の4つのテーマは独立に進められるものではなく、互いに補完しあうものであるため、以下の成果報告では、成果内容がどのテーマに関連しているかをまとめる。2018年度にまずはテーマ3についての研究成果を国内外で口頭発表した。既存の研究が多変量正規分布で仮定されたものであるのに対して、正規分布よりも頑健な楕円分布の下で、標本分散共分散行列、ウィシャート行列の最大固有値・最小固有値分布の導出を行なった。2018年度には準備段階で非特異の場合での議論を論文にまとめており、その論文が採択された。この楕円母集団のもとでの非特異の議論を特異の場合に拡張し、テーマ1, 2に関連しこれまで知られていた多変数の超幾何関数を特異の場合に対応できるように改良したことで、特異ケースでの共分散行列の最大固有値分布が正確に求められた。本研究の内容は2021年度に海外学術雑誌に投稿し現在、査読中となっている。2018年度では、さらに、自由度や次元が大きくなった場合の理論を用いて、固有値分布の近似分布の導出を行なった。テーマ2で新たに導入した関数はテーマ1の統一化とも関連するため、テーマ1の枠組みにおいてテーマ2の一般化への足掛かりを作ったことになる。

2018, 2019年度にテーマ2と4に関連して、テーマ1の特異ケースでの群作用で不変な多項式の存在証明に成功した。これは、特異のウィシャート行列に関するランダム行列論を展開するためにとっても重要であることがわかり、実際、テーマ3にも応用ができています。この不変多項式の級数として導入した新しい超幾何関数を行列変量の非斉次超幾何関数と名付け、この関数の理論的性質を調べた。また、この関数から、固有値の同時密度関数や最大固有値の分布関数が求まることが示された。この存在証明が完成したことにより、特異ウィシャート行列の固有値の正確分布論が、非特異と同様にある程度完成した。まだまだ未解決な問題も山積しているが、特異ウィシャート行列の固有値分布論の土台をつくれたのではないかと考えている。これらの成果により、本研究で想定したテーマ2の問題を解決したこともつながり、同様にテーマ1にも関連しても新しい超幾何関数を導入することができたことにもなる。また、2019年度にはテーマ1に関して標本相関係数の正確分布の新しい計算方法を確立する目的で、サンプルサイズに関する漸化式を導出することができた。さらにこれをテーマ3へつなげるべく、共同研究者とともに議論したが、まだまだ課題が残った。

2020年度は、2019, 2020での研究成果をさらにブラッシュアップを行い、上記の口頭発表等の成果をまとめ、4本の海外の学術雑誌へと投稿した。うち、2本は2021年度初めに掲載が決まり公開されている。掲載論文の1つ目では、多変量解析の枠組みでの実数  $\alpha=1$  で非斉次型超幾何関数を導入し、ウィシャート行列の最大固有値の分布関数を導出した。さらに  $\alpha=2$  (複素数),  $\alpha=4$  (四元数) でも同様に非斉次型超幾何関数が導入できることを示し、その性質を議論した。また、数値実験では無線通信技術の1つであるMIMO(Multiple-input multiple-output)システムに関する伝送路容量を計算した。掲載論文の2つ目では、多変量分散分析に関連して2つのウィシャート行列の固有値分布論を展開している。ここで必要となる行列はF行列とも呼ばれ、ウィシャート行列とそれとは独立の2つ目のウィシャート行列のインバースの積で定義される。通常は1つ目の行列が非特異であることがこれまでの分散分析での制約であったが、本研究で特異の場合でもF行列の固有値の同時密度や最大固有値の分布関数が、非斉次型超幾何関数を經由して導出できることを示した。最大固有値を用いた平均ベクトルのロイ型の検定では1つ目の行列(郡間の分散共分散行列)が非特異という制約は、多数の母集団の場合は障害となっていた(サンプルサイズと母集団の数に制約が生まれる)。数値計算に計算機パワーを必要とする計算上の問題があるものの、理論的にはサンプルサイズと母集団の数の制約なしに検定の枠組みができたことになる。2本の掲載論文は特異かつ  $\alpha=1, 2, 4$  に関する成果であるが、投稿した論文では  $\alpha > 0$  での  $\alpha$ -ウィシャート行列の固有値の近似に取り組んだ。そして、 $\alpha=1, 2, 4$  の場合にはスティーフェル多様体上の積分をラプラス近似などして、漸近分布を導出できた。さらに任意の  $\alpha > 0$  においても、固有値のマックス・ミニマム原理を利用することで、漸近分布の導出も完成した。また、当初想定していなかった新たな定理も導くことができた。それは、特異・非特異ウィシャート行列の正確な最大固有値の分布を統一的に表現できるという定理である。特異な場合で導入した非斉次超幾何関数を発展させることにより、非特異でよく知られているオイラーの公式が使えることがわかり、この公式とポッホハマー記号の性質を利用することで、特異・非特異の最大固有値分布が統一に表現できることを示した。本内容は2021年度早々に学会にて発表を行なった。

以上のように、研究期間内に想定した4つのテーマ全てにおいて研究成果を得ることができたと考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Shimizu Koki, Hashiguchi Hiroki	4. 巻 183
2. 論文標題 Heterogeneous hypergeometric functions with two matrix arguments and the exact distribution of the largest eigenvalue of a singular beta-Wishart matrix	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Multivariate Analysis	6. 最初と最後の頁 104714
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmva.2020.104714	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shimizu Koki, Hashiguchi Hiroki	4. 巻 Online ready
2. 論文標題 Expressing the largest eigenvalue of a singular beta F-matrix with heterogeneous hypergeometric functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Random Matrices: Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 2250005
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S2010326322500058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Haruto Mura, Hiroki Hashiguchi, Shigekazu Nakagawa, Yoko Ono.	4. 巻 55
2. 論文標題 Holonomic properties and recurrence formula for the distribution of sample correlation coefficient	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SUT Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 39--52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 A. Shinozaki, H. Hashiguchi and T. Iwashita	4. 巻 30
2. 論文標題 DISTRIBUTION OF THE LARGEST EIGENVALUE OF AN ELLIPTICAL WISHART MATRIX AND ITS SIMULATION	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Jpn. Soc. Comp. Statist.	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5183/jjscs.1708001_244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Aya Shinozaki and Hiroki Hashiguchi	4. 巻 19
2. 論文標題 EXACT DISTRIBUTION OF THE LARGEST AND SMALLEST EIGENVALUES OF THE RATIO OF TWO ELLIPTICAL WISHART MATRICES	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 71--82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18642/jsata_7100121983	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計9件(うち招待講演 1件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 清水康希, 橋口博樹
2. 発表標題 非斉次超幾何関数を用いた特異ウィシャート行列の固有値分布論とその応用
3. 学会等名 2020年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 篠崎絢, 清水康希, 橋口博樹
2. 発表標題 特異楕円ウィシャート行列の固有値の分布について
3. 学会等名 日本計算機統計学会, 第34回大会講演論文集
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shigekazu Nakagawa, Hiroki Hashiguchi, Yoko Ono
2. 発表標題 Asymptotic Distribution of Sample Correlation Coefficient Under Elliptical Population
3. 学会等名 Data Science, Statistics & Visualisation (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋口博樹, 清水康希
2. 発表標題 特異ベータウィシャート行列に関する固有値の分布論について
3. 学会等名 確率・統計・行列ワークショップ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 那須田亮, 清水康希, 橋口博樹
2. 発表標題 Beta-Wishart ensemble における固有値のガンマ分布近似について
3. 学会等名 日本計算機統計学会第33 回シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金子明広, 橋口博樹
2. 発表標題 RMTと情報量基準の融合によるネットワーククラスタリング
3. 学会等名 日本計算機統計学会第33 回シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Aya Shinozaki
2. 発表標題 Numerical computation for the distribution of the largest eigenvalue under elliptical model
3. 学会等名 Statistical Computing: Challenges and Opportunities in Data Science (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Koki Shimizu
2. 発表標題 Approximate distributions of eigenvalues of singular Wishart matrix
3. 学会等名 Statistical Computing: Challenges and Opportunities in Data Science (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Haruto Mura
2. 発表標題 Holonomic properties and recurrence formula for the distribution of sample correlation coefficient
3. 学会等名 Statistical Computing: Challenges and Opportunities in Data Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	岩下 登志也  (Iwashita Toshiya)  (20266919)	東京理科大学・理工学部教養・准教授   (32660)	
研究 分担者	中川 重和  (Nakagawa Shigekazu)  (90248203)	岡山理科大学・総合情報学部・教授   (35302)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 協力者	清水 康希  (Shimizu Koki)	東京理科大学・理学研究科・博士後期課程	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------