

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 7 日現在

機関番号：32670

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03429

研究課題名(和文) 2層渦あり流れ問題の数値解析的研究

研究課題名(英文) Numerical analysis of rotational flows of two vortical layers

研究代表者

東海林 まゆみ (SHOJI, Mayumi)

日本女子大学・理学部・研究員

研究者番号：10216161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：深さ、渦度が相異なる2層の渦なし流れ問題の数値解析的研究である。分岐問題であり、とくに着目する点は、よどみ点の有無？どこに出現するか？である。したがって、よどみ点がある場合に対応できる計算アルゴリズムが必須であり、そのようなプログラム開発からスタートした。数値シミュレーションは2層が表面張力波、重力・表面張力波、重力波、の3通りの場合について行った。重力や表面張力がよどみ点発生にどのように関わるかを調べた。2層の深さの比や渦度の違いによりよどみ点の出現のし方がどのように変化するか、について興味深い結果が得られた。重力・表面張力波の場合には高次分岐がおこることも確認できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

深さ有限な流体では、底の方には摩擦によって、自由表面の近くには風によって渦が発生する。よって多層流を考えることでより実際に近い問題設定を扱うことができる。しかし最もシンプルな2層流ですら関わるパラメータが多い。理論だけで解析することは非常に難しく数値シミュレーションに頼らざるを得ない。そして数値計算結果ですら未だほとんどわかっていないのが現状である。そこで数値シミュレーションで様々な解を具体的に求め、よどみ点の発生状況や分岐構造を明らかにできたことは非常に意義深い。本研究用に開発した計算プログラムも、多層流の計算など今後更に研究を展開する際の手がかりを与えるものとする。

研究成果の概要(英文)：Stationary waves of constant shape and constant propagation speed on rotational flows of two layers are computed numerically. Two layers are assumed to be of distinct constant vorticity distributions. Vorticity is created near the bottom by the friction, or near the free boundary by the wind. Accordingly, two-layer vorticity is a step closer to the real water wave. Three different kinds of waves of finite depth are considered: pure capillary, capillary-gravity, and gravity waves. The problem is formulated as a bifurcation problem, which involves many parameters and produces a complicated structure of solutions. We adopted a numerical method by which waves with stagnation points can be computed, and obtained variety of new solutions. It is also reported that the locations of the stagnation points vary curiously with the prescribed parameters and that they offer an interesting problem.

研究分野：流体問題の数値解析的研究

キーワード：重力表面張力波 2層流 渦あり流れ 分岐問題 数値シミュレーション よどみ点

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 水の波の分岐問題は非常に古典的な問題ではあるが、現在でも未解決な部分が多く研究対象として魅力の尽きないテーマである。最もシンプルな条件の場合には正則関数を用いて数学的に厳密な取り扱いができる。しかし様々な条件を考慮するにつれて扱いが難しくなり、理論だけではなく数値解析的アプローチに頼ることも必須となってくる。

(2) 我々の過去の研究成果として、流体域が1層(深さは有限または無限)の場合に様々な解や分岐構造を調べたものがある(文献 他)。1層流の場合には他にも多くの研究成果が出されている。

(3) 一方、多層流に関しては理論的にも数値解析的にも研究例は少ない。重力波で各層の渦度が定数の場合には、理論的に考察されたものとして文献 や我々の研究のベースとなった文献がある。数値計算例を示したものはまだ数例で文献 他が知られていた。

(4) 以上のように重力波に関してはいくつかの研究結果があったが、表面張力を考慮した場合の数値計算結果はまだ何も知られていなかった。

### 2. 研究の目的

(1) 2層の渦あり流れの分岐問題を扱う。渦あり流れ問題の場合に重要なことは、よどみ点発生のしくみを具体的に把握することである。つまり、どのような状況でよどみ点が発生するか?もし発生するならば発生する場所はどこか?などを明確にすることである。

(2) 表面張力がよどみ点発生にどのような影響を持つかを調べる。とともに2層が、表面張力波、重力・表面張力波、重力波、の3通りの場合を比較検討する。

(3) 上記の数値シミュレーションを実現するために、先ずよどみ点が存在する場合にも計算可能なアルゴリズムを構築し、そのようなプログラムを開発する。

### 3. 研究の方法

(1) アルゴリズム構築は、文献 のアイデアを基にして、それをよどみ点がある場合にも対応できるように改良することである。そのプログラムを作成したら、数値実験を通してプログラムの検証を行う。具体的な検証方法は、すでに別のアルゴリズムで計算結果が得られているもの(重力波1層流の場合)との比較によって行う。

(2) 2層が表面張力波の場合に数値シミュレーションを行う。組み合わせるパラメータは、進行波の速度、2層の深さの比、各層の渦度(定数)、表面張力および重力に関係する2つの分岐パラメータ、というように自由度が無制限通り存在することになる。そこでパラメータ値を系統的に組み合わせ、表にまとめ、組織的な数値実験を行う。もしよどみ点が見つかったら、パラメータを少し変えてよどみ点まわりの渦の変化などを詳細に調べる。

(3) 2層が重力・表面張力波の場合に同様にして数値実験を行う。ただし1層流の研究 で示されているように、この場合には2重分岐点が存在し、分岐構造は非常に複雑となることが知られている。したがって2層流の場合にはさらに複雑な構造をなすことが考えられる。そこでこの場合には、分岐構造を調べることに視点を置いた数値実験を目指す。

(4) 最後に2層が重力波の場合にも同様の数値実験を行い、以上3通りの場合の結果をまとめる。重力、表面張力のそれぞれがよどみ点出現にどのような影響を与えるかを確かめる。また、2層の深さ、渦度の違いでどのような変化がおこるかを調べる。

### 4. 研究成果

問題は、左右対称で周期的な形状の波が一定速度で左方向に流れる進行波を考える。したがってこれは定常流の問題として定式化できる。水の波は様々な研究がなされている問題であるが本研究の新しいところは、2層の渦なし流れ問題の数値シミュレーション結果を得たことである。とくに表面張力を考慮した場合の計算結果を示したのは本研究が初めてである。数学的な定式化は基本的には文献 に倣ったが、そのままではよどみ点が見れる場合には計算できなくなる。そこで、文献 で用いた手法を組み込み修正したアルゴリズムを構築した。具体

的には、自由表面と内部境界は形状関数を未知関数とし Fourier 級数展開法によって、領域内部は流れ関数を未知関数として差分法によって、離散方程式の定式化を行った。

## (1) 表面張力波

### 1 層流の場合

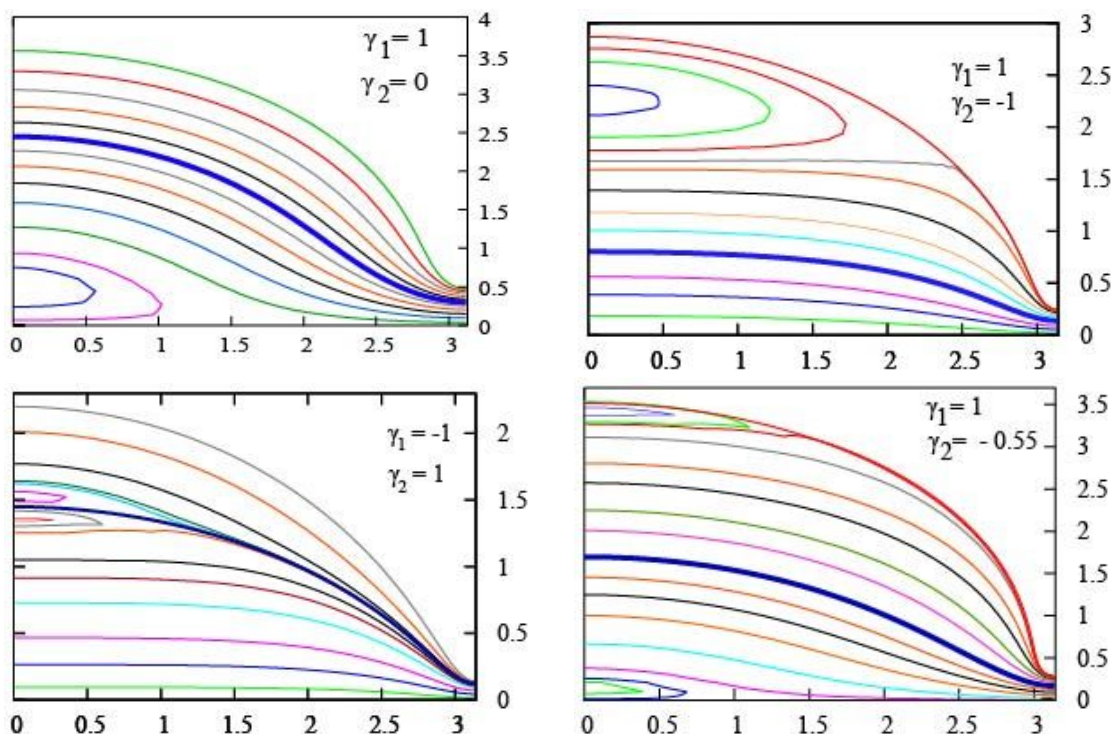
よどみ点が出現するときには、渦度が負の領域では上部に、渦度が正の領域では下部に現れることが分かった。この渦度が正/負の領域ではよどみ点は下部/上部に出現する、という事実は本研究を通してすべての場合に共通した結果である。

過去表面張力波の渦あり流れ問題に関して、1層流の場合においてもこのような計算結果を示したものは未だなかった。そしてこの1層流で明らかになった現象は、2層流の現象を理解する上で貴重な手がかりを与えてくれた。

### 2 層流の場合

上層と下層の深さの比、各層の渦度、などの組み合わせ方で様々な解が得られた。まとめると下記ようになる。

- ・(下層の渦度、上層の渦度)の値の組み合わせが(渦なし、正)および(負、渦なし)のときには、他のパラメータ値によらずよどみ点は現れない。
- ・上記以外の渦度の組み合わせでは、深さ、渦度の値によってよどみ点の有無が変化する。
- ・よどみ点が出現するとき、1層流の場合と同様に、渦度正の領域では下部、渦度負の領域では上部に現れる。
- ・2層の深さの比とよどみ点の有無との関連はまだ分かっていない。例えば下図の上段右の例のように、必ずしも深い層の方に渦が現れるとは限らない。
- ・分岐解を分岐枝に沿って追跡していくと、現れたよどみ点がその後消えてなくなる場合もあれば、よどみ点周りの渦がどんどん拡大していく場合もある。
- ・よどみ点の出現のしかたは、下図のように様々な例がある。極めて稀ではあるが、下段の2例のように上層と下層の両方によどみ点が、一瞬ではあるが、同時に存在することがある。多くの場合は、片側の層にのみ現れる。



図：様々なよどみ点の現れ方  
 $\gamma_1$  は下層の渦度、 $\gamma_2$  は上層の渦度

## (2) 重力・表面張力波

よどみ点出現に関しては、表面張力波の場合とほぼ同様の結果が得られた。このことからよどみ点が出現するかどうかには、重力よりも表面張力の方が大きく影響するものと思われる。

表面張力波の場合と大きく異なる点は、分岐構造の複雑さである。何故なら重力・表面張力波の場合には、分岐パラメータが2つ存在し2重分岐点が存在することが理論的に言える。そして2重分岐点の近くでは、複雑に分岐構造が変化するであろうことが予想される。

そのような視点からこの場合には、分岐構造を明確にすることを旨として数値実験を行った。その結果、高次分岐の存在を確認することができた。1例を挙げると、モード1の解から2次分岐した分岐枝を追跡していくと、再び元のモード1の解の枝に合流する場合もあれば、モード2の解の枝に合流する場合もあり、さらにはモード3の解の枝に合流する場合もある、などの現象を捉えることができた。

現アルゴリズムでさらに大域的な分岐構造を調べようとすると、大容量メモリ、より高速なCPU、など大規模計算が必要となる。他のアルゴリズム構築などの工夫が望まれる。

もう一つの課題として、現プログラムでは overhanging 波を計算することができないことである。分岐枝を追跡していくと突然計算が続行できなくなることがある。理由としては、その先解が overhanging な波形になるため、と考えられる。それに対応する新しいアルゴリズムを構築する必要がある。

### (3) 重力波

#### 1 層流の場合

重力波1層流の場合にはすでに他にも様々な計算結果が出されており、我々も本研究とは異なるアルゴリズムで得た計算結果がある(文献)。したがってこの重力波1層流の計算は、新アルゴリズムの検証を目的としたものであり新しいものではない。ただし2層流の計算結果の考察の際には、この1層流の計算結果が貴重な手掛かりとなった。

重力波では渦度が負の場合にはよどみ点は現れない。渦度が負の時分岐枝を辿ってゆくと、波形は山の部分が尖ってゆく。渦度が正の時には、逆に波形は山の部分が丸く大きくなり下方によどみ点が現れる。渦度が大きくなるほど、よどみ点周りの渦もどんどん大きくなる。

#### 2 層流の場合

重力波ではよどみ点が出現する場合は稀である。本研究で計算した限りでは、下層の渦度が正の場合だけよどみ点を得ることができた。下層の渦度が負または渦なしの場合には、上層の渦度が正でもよどみ点は現れない。

以上本研究では、各層の渦度が相異なる定数の場合を数値シミュレーションした。各層の渦度が定数ではない一般の場合の研究は今後の課題としたい。

#### <引用文献>

H. Okamoto and M. Shoji, The Mathematical Theory of Bifurcation of Permanent Progressive Water-Waves, World Scientific, 2001

A. Constantin and W. Strauss, Exact steady periodic water waves with vorticity, Comm. Pure Appl. Math., 57, 2004, 481-527

J. Ko and W. Strauss, Effect of vorticity on steady water waves, J. Fluid Mech., 608, 2008, 197-215

C. I. Martin and B.-V. Matioc, Existence of capillary-gravity water waves with piecewise constant vorticity, J. Diff. Eqns., 256, 2014, 3086-3114

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shoji Mayumi, Okamoto Hisashi	4. 巻 38
2. 論文標題 Stationary water waves on rotational flows of two vortical layers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 79 ~ 103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-020-00431-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 東海林まゆみ
2. 発表標題 Progressive water waves on two vortical layers
3. 学会等名 ICIAM 2019 VALENCIA, 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 東海林まゆみ
2. 発表標題 2層渦あり流れの数値シミュレーション
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年度年会,
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 東海林まゆみ
2. 発表標題 Numerical approach for water waves on rotational flow of two vortical layers
3. 学会等名 The international Conference on Partial Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 東海林まゆみ
2. 発表標題 Stationary water waves on rotational flow of two vortical layers
3. 学会等名 ICMA-MU 2018: International Conference in Mathematics and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------