

令和 4 年 6 月 14 日現在

機関番号：34428

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03437

研究課題名(和文) 斜面の状態効果がもたらす懸濁液ダイナミクスの数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of suspension dynamics under the effect of slope

研究代表者

友枝 恭子 (Kyoko, Tomoeda)

摂南大学・理工学部・准教授

研究者番号：90611898

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：斜面の状態効果を考慮するため、先行研究で行われた実験を基に、凹凸斜面に対する懸濁液の流下実験を実施した。壁面効果関数 $W(h)$ を含めた保存則系で記述される数値モデル(Zhou等(2005))のリーマン問題に対して以下の成果を得た。 $W(h)=0$ のとき、弱解を構成する2つの単純波のうち1つは必ず接触不連続であることが分かった。これは懸濁液の隆起現象の原因は2つの衝撃波であることに矛盾する。 $W(h)=1$ のとき、特定の状況下における1-衝撃波の族の存在を確認することができた。また隆起現象の起因となる2つの衝撃波(1-衝撃波と2-衝撃波)が存在しうる粒子の体積分率、粒子のサイズの範囲を数値的に導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

先行研究で行われた平滑斜面を流下する懸濁液の考察は、土石流やスラリー等、実社会で見られる自然現象の基となるものである。本研究では、先行研究で考察された平滑な斜面の場合から、さらに斜面の状態効果を取り入れた。斜面の状態効果を取り入れた考察は、今まで得られた知見をより実際の現象に近づけるという意味で重要性の高い研究である。また、本研究での数学解析によって得られた成果は、実際の現象解明に数学的立場から貢献できる可能性を秘めており、学際的意義においても重要であると言える。

研究成果の概要(英文)：To consider the effect of the condition of the plate, we carried out the experiment of the particle-laden flows in the uneven plate, which based on the case of the smooth plate conducted in the previous study. We obtained the following results for a mathematical model (Zhou et al.(2005)) including the wall function $W(h)$ describing the wall effect. When $W(h)=0$, one of simple waves of Riemann solution is only contact discontinuous. This contradicts that the phenomenon of the particle ridge rich phenomenon is caused by two shock waves. When $W(h)=1$, we confirmed the existence of the 1-shock wave family under certain circumstances. In addition, we derived the range of the volume fraction and the size of the particles in which two shock waves (1-shock wave and 2-shock wave) generate the particle-rich ridge by using numerical calculation.

研究分野：応用数学

キーワード：懸濁液 衝撃波 希薄波

1. 研究開始当初の背景

固体粒子が分散した液体のことを懸濁液といい、その表面は流下する斜面の状態と溶媒の種類によって変化する。溶媒が単一粒子の場合、平滑な斜面を流下する懸濁液の水面形は斜面の傾斜角度と粒子の体積分率に応じて粒子沈降(settled)・混合状態(well-mixed)・粒子塊の隆起(ridged)に変化する。これら一連の変化は、懸濁液中における衝撃波や希薄波の相互作用によるものであると考えられており、扱う数理モデルは保存則系のリーマン問題である。

懸濁液に関連する物理研究の歴史は非常に長く、1950年代から2000年代にかけて多くの結果が報告されている。最も先駆的な結果の1つに、Richardson-Zaki(1954)によるものがある。彼らは懸濁液中の粒子沈降が粒子の体積分率の影響で起こることを示し、粒子層と流体層の形成の様子を調べた。また、Huppert(1982)や Jerrett-Bruyn(1992)の結果では、懸濁液上部の流体層部分においてフィンガリング不安定が生じることが示されている。懸濁液の縁部に現れる隆起の形成メカニズムについては Zhou 等(2005)によって調べられ、懸濁液中に発生する衝撃波によることが示されている。粒子と液体の混合状態については Wang 等(2015)の結果がある。彼らは数理モデルを数値実験することで、希薄波と衝撃波を重ね合わせた合成波や特異衝撃波(不連続点でデルタ関数が乗っている衝撃波)など特殊な解のプロファイルを示した。しかし、これらの先行研究は平滑な斜面に限定されたものであり、斜面の状態によって引き起こされる影響は考慮されていない。

一方、保存則系の数学理論については Lax(1954)による結果が重要である。彼は双曲型保存則系のリーマン問題に対して、各特性場が真に非線形の場合、解を特徴付ける“単純波”は衝撃波または希薄波のどちらかであり、各特性場が線形退化の場合、接触不連続波であることを示した。更にいくつかの保存則系は特異衝撃波を持ちうることで Keyfitz 等(1988)によって示されている。これらの数学理論を基に、友枝(研究代表者)と松江(研究分担者)は平滑な斜面を流下する懸濁液の数理モデルに対する解析手法を構築し、粒子沈降と粒子の隆起で現れる単純波のパターンを網羅することが出来た [1]。しかし、これらの数学解析の分野においても扱われる数理モデルは平滑な斜面の場合であり、斜面の形状が凹凸な場合のような斜面の状態効果を取り入れた数理モデルについて考察されていないのが現状である。

【引用文献】 [1] Kaname Matsue, Kyoko Tomoeda,

Toward a mathematical analysis for a model of suspension flowing down an inclined plane, Proceedings of Equadiff 2017 Conference 349-358 (2017).

2. 研究の目的

上記の「1. 研究開始当初の背景」でも述べた通り、平滑な斜面を流下する懸濁液に対する数学解析は完全ではないが成されてきている。その一方で、平滑ではない斜面を流下する懸濁液については、数学解析を行う上で不可欠な数理モデルすらあまり提唱されていないのが現状である。例えば 土石流などのような、実際の自然現象で見られる斜面においては、流体の運動によって斜面上に何らかの形状が生じたり、斜面の形状によって流体の流れが変化することもあるため、斜面の状態効果による影響を無視することはできない。そこで本研究では、既存の先行研究をより、実際の現象に対応できるようにするために、凹凸の形状を持つ斜面について考察する。凹凸な斜面を流下する懸濁液に対応する数理モデルを提唱し、このモデルが持つ典型的な衝撃波や希薄波、さらに特殊なプロファイルを持つ衝撃波のダイナミクスを調べることにより、懸濁液の運動メカニズムを探る。平滑な斜面の場合、settled に対応した数理モデルについては、研究代表者と研究分担者もいくつかの数学解析手法を構築している。これらの手法を更に進化発展させて斜面の影響を考慮した場合のメカニズムを理論的に解明することが目的である。

3. 研究の方法

1. 先行研究の論文を読み、平滑な斜面を流下する懸濁液(ガラスビーズとシリコンオイルの混合液)の実験に関する情報を収集した。先行研究の情報を基にして、実験装置の材料(アクリル板)と懸濁液の材料(シリコンオイルとガラスビーズ)その他の消耗品を購入した。実験装置は、摂南大学テクノセンターに依頼し作成した。実験において、まず先行研究で行われた平滑な斜面に対する実験を再現し、先行結果で示されたパターン(settled, well-mixed, ridged)を確認した。次に斜面が凹凸である場合の実験を行い、平滑な場合の実験結果と比較した。

2. 斜面が平滑な場合・凹凸な場合双方とも流体の先端付近に生じる現象は3次元的であり、特に ridged において生じる隆起現象を考察する場合、奥行方向の情報は不可欠であった。そこで、先行研究で提唱されている基礎方程式系を基に奥行方向を取り入れた基礎方程式系を導出した。この基礎方程式系から導出される粒子輸送モデルや settled に対応する希釈近似方程式は、2次元保存則系であることが予測できたので、2次元保存則系の数学解析に関する情報を収集した。

3. 斜面の傾斜角が高く、懸濁液に含まれる粒子の体積分率が高い場合、懸濁液の先端付近に隆起現象 (ridged) が生じる。この隆起現象に対する縮約方程式 (潤滑モデル) は Zhou 等 (2005) や Cook 等 (2007) によって導出されている。彼らが提唱した潤滑モデルでは、粒子-粒子間と粒子-壁面間の相互作用 (斜面の状態効果が与える粒子の影響) も考慮されており、壁面効果関数は、本来粒子の粒径と懸濁液の厚さに依存した関数であるため、生じる壁面効果は粒子の粒径によって変化する。先行研究では壁面効果関数を漸近的に 1 として考察されているため、粒径の違いによる壁面の影響については考察されていない。また漸近的に 1 とした場合、連続体仮説が崩壊する危険性も先行研究によって示唆されていたため、壁面効果関数のある値に漸近させず、定式化された関数のまま扱うことにした。

1~3 を行うにあたり、2018年度と2019年度は国内出張や海外出張により、研究分担者や関連する研究者と研究打ち合わせを行った。2020年度と2021年度はコロナ感染症の緊急事態宣言発令に伴う自粛の影響によって出張することが困難であった。そのため代替手段として、オンラインによる研究打ち合わせを行った。

4. 研究成果

1. 平滑な斜面における懸濁液 (ガラスビーズ・シリコンオイルの混合液) の運動を記述した基礎方程式系に斜面の状態効果を取り入れた基礎方程式系を提唱した。斜面が平滑な場合の基礎方程式系に対する数学解析では、流体の流れは傾斜一方向に制限されており、扱う縮約方程式は空間1次元 (斜面) における保存則系である。一方、斜面の状態効果を考慮した場合、斜面の状況に応じて傾斜・奥行二方向の流れを考えなければならないため、我々は空間2次元 (斜面・奥行) の保存則系として数理モデルを提唱した。

2. 先行研究では懸濁液の運動を記述する基礎方程式系は非圧縮性流体で定式化されている一方、懸濁液の先端付近に生じる隆起現象は2つの衝撃波によるものとされている。衝撃波は圧縮性流体で見られる現象であることと再現実験から、先端付近の隆起現象は表面張力による可能性も考えられる。そこで基礎方程式系から縮約方程式を導出する際、先行研究では十分小さいとされていた表面張力係数の項を残すことで表面張力係数が大きい場合にも対応できるような縮約方程式の再定式化を行った。

3. 斜面 (壁面) の状態効果による影響を調べるため、Zhou 等 (2005) や Cook 等 (2008) で提唱された数理モデルの考察を行った。彼らが提唱した数理モデルは、壁面効果関数 $W(h)$ を含めた保存則系であり、懸濁液の隆起現象はこのモデルに対するリーマン問題の弱解を構成する2つの衝撃波に起因するとされている。これに対する数学的正当性を示すため、まず $W(h)=0$ のときを考察した。その結果、弱解を構成する2つの単純波のうち1つは接触不連続となるため、衝撃波は存在しないことが判明した。次に $W(h)=1$ について考察を行った。Zhou 等 (2005) や Cook 等 (2008) の数値実験により、2つの衝撃波 (1-衝撃波と2-衝撃波) の存在は確認されていたが、数学解析としては証明されていない。また我々の2020年度までの研究成果では、2-衝撃波は存在が示されていたものの、1-衝撃波については存在を示すことができていなかった。しかし、分岐理論に基づく数値計算により、特定の状況下における1-衝撃波の族の存在を確認することができた。更に、2つの衝撃波 (1-衝撃波と2-衝撃波) が存在しうる粒子の体積分率と粒子のサイズの範囲について調べた。また、隆起現象と体積分率・粒子サイズの関係についても調べた。

1~3 の研究成果に関しては国内や海外の学会・研究集会やセミナーで発表した。また3で得られた研究成果については、以下の論文としてまとめて投稿した。

Kaname Matsue, Kyoko Tomoeda,

A mathematical treatment of the bump structure of the particle-laden flows with particle features, JJIAM submitted.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kaname Matsue, Shikhar Mohan and Moshe Matalon	4. 巻 -
2. 論文標題 Effect of gravity on hydro- dynamically unstable flames	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings in the 12th Asia-Pacific Conference on Combustion	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 松江要	4. 巻 71
2. 論文標題 Fast-slow系における精度保証付き数値計算	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 『数学』（日本数学会編集）	6. 最初と最後の頁 252-281
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kaname Matsue	4. 巻 267
2. 論文標題 Geometric treatments and a common mechanism in finite-time singularities for autonomous ODEs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 7313-7368
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kaname Matsue, Leo Matsuoka, Osamu Ogurisu and Etsuo Segawa	4. 巻 6
2. 論文標題 Resonant-tunneling in discrete-time quantum walk	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quantum Studies: Mathematics and Foundations	6. 最初と最後の頁 35-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/2Fs40509-017-0151-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kaname Matsue	4. 巻 17
2. 論文標題 On Blow-Up Solutions of Differential Equations with Poincare-Type Compactifications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 2249-2288
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/17M1124498	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 松江 要	4. 巻 37
2. 論文標題 微分方程式の爆発解：精度保証付き数値計算と力学系の解釈	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本シミュレーション学会誌「シミュレーション」	6. 最初と最後の頁 188-196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 松江 要	4. 巻 71
2. 論文標題 Fast-slow系における精度保証付き数値計算	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 「数学」(日本数学会編集)	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Kyoko Tomoeda
2. 発表標題 Mathematical analysis of suspension flowing down an inclined plane-particle-rich ridge near the contact line-
3. 学会等名 Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 友枝 恭子
2. 発表標題 On the shock front for granular flows
3. 学会等名 北陸応用数理研究会2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kyoko Tomoeda, Kaname Matsue
2. 発表標題 Mathematical analysis of suspension flowing down an inclined plane particle-rich ridge near the contact line
3. 学会等名 Workshop on scientific computing 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 友枝 恭子
2. 発表標題 斜面を流下する懸濁液の数学解析～空間3次元的に考えてみる～
3. 学会等名 数学と現象 in 山中湖 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kaname Matsue, Shikhar Mohan and Moshe Matalon
2. 発表標題 Effect of gravity on hydrodynamically unstable flames
3. 学会等名 The 12th Asia-Pacific Conference on Combustion (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Rigorous numerics for finite-time singularities -fundamentals and perspectives-
3. 学会等名 ICIAM2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松江 要, Moshe Matalon
2. 発表標題 Rigorous numerics in combustion problem: premixed stationary flames in weak thermal expansion setting
3. 学会等名 日本応用数理学会 2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kyoko Tomoeda, Kaname Matsue
2. 発表標題 Toward a mathematical analysis for a model of suspension flowing down an inclined plane
3. 学会等名 ANZIAM 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松江 要
2. 発表標題 数学・数理科学的アプローチの可能性：予混合火炎のモデル方程式を例に
3. 学会等名 公益社団法人自動車技術会2018年春季大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Finite-time singularity for ODEs from the viewpoint of dynamical systems
3. 学会等名 EASIAM 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Rigorous numerics of finite-time singularity for ODEs
3. 学会等名 EASIAM 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松江 要, 高安 亮紀
2. 発表標題 微分方程式の爆発解の精度保証付き数値計算: ケーススタディ --- 指数関数非線型項を持つ場合
3. 学会等名 日本応用数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Rigorous numerics and asymptotic analysis of finite-time singularities : qualitative and quantitative natures
3. 学会等名 SCAN 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	松江 要 (Matsue Kaname) (70610046)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授 (17102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------