様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：４７１１８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ０３４４０

研究課題名（和文）有限要素法による発展方程式の解に対する数値的検証法の構築

研究課題名（英文）Numerical verification of solutions for parabolic problems based on the finite element method

研究代表者
橋本　弘治（Hashimoto, Kouji）

中村学園大学短期大学部・幼児保育学科・准教授

研究者番号：４０４５５０９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：数値的安定性が保証された全離散有限要素スキームを用いた、発展方程式に対する数値的検証法を構築した。そして、実際問題として発展型の反応拡散方程式の安定定常解付近までの解軌道の検証に成功した。特に、これまで検証例のなかった、zero解以外の安定定常解の解軌道を精度保証付き数値計算により捉えることが出来たことは本研究の優位性を示している。これにより精度保証の長年の念願であった解析的手法ではなく、数値解析手法としての有限要素法を基盤とする発展方程式に対する数値的検証法の基礎は構築された。更に、共同研究としてFjita型方程式の爆発解に対して爆発時刻の評価に成功して、提案手法の有用性を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
これまでに提案されていなかった一般的な数値計算法である有限要素法を基盤とする発展方程式の解軌道に対する数値的検証法の構築により、発展方程式に対する新たな数値解法を提案することができた。

研究成果の概要（英文）：Using the full-descrete finite element scheme which is satisfied the numerical stability, we presented the numerical verification method for solutions of nonlinear parabolic problems.

研究分野：数値解析学

キーワード：数値的検証法　発展方程式

様　式　C－19、F－19－1、Z－19（共通）

１．研究開始当初の背景

数値的検証法とは無限次元問題である非線形微分方程式の弱解の存在・局所一意証明および非存在証明を与える手法として日本とドイツの研究者らを中心に近年構築された方法であり、計算機による近似計算の厳密な誤差評価という計算の品質保証を行うものである。また、これは理論的研究が困難な解析学上の問題に対する計算機支援証明という観点からも世界的に注目を集めている。その中で、Nakao 法は有限要素法の構成的事前誤差評価を用いて非線形問題を適切な関数空間の近似問題と行列固有値問題の精度保証及び不動点理論に帰着させて完全なる無限次元 Newton 法を計算機により実現する方法である。近年、多くの研究者により Nakao 法を用いた検証結果が報告され、その有用性が報告されている。

Nakao 法を用いた数値的検証法の構築により、これまで非線形楕円型方程式の境界値問題については、有力な数値解法と言って過言ではない程の検証結果が得られているが、発展方程式については殆ど手付かずの状況であった。そこで、本研究では発展方程式（放物型問題）においても有力な数値解法となることが期待できる Nakao 法を用いた数値的検証法の構築に取り組むことにした。

２．研究の目的

数学をはじめとして様々な数理科学の分野において、自然・物理現象の数理モデルとして時間発展微分方程式（以下、発展方程式と記す）が研究され、科学技術の発展に大きな貢献を果たしている。そして、現象数理において重要となる数理モデルも多くの研究成果の積み重ねにより様々な現象へと適応範囲を広め、より複雑で特異な現象へと研究対象が進みつつある。但し、その多くが時間方向に関しては点でしか捉えることが出来ていない状況である。

そこで、本研究では全方向に関して発展方程式の解を数学的に厳密により遠くまで捉えることを目的として、数値的安定性が保証される有限要素法による全離散スキームを提案すると共に、その構成的誤差評価を含めた発展方程式の解に対する数値的検証法を構築する。

３．研究の方法

(1)本研究では以下の非線形発展方程式に対する数値的検証法を構築することを目的とする。

$$\begin{aligned} u_t - \nu\Delta u &= g(u;x,t) & (x,t)\in\Omega\times J \\ u(x,t) &= 0 & (x,t)\in\partial\Omega\times J \\ u(x,0) &= u_0 & x\in\Omega \end{aligned}$$

但し、Ωは有界領域として、$J=(0,T)$，$T>0$ であり、$g(u)$は u の非線形関数である。

上記のような発展方程式（初期値問題）は様々な現象数理に多く現れるが、空間 x-方向に関しては有限要素法等の線として捉える数値解法が多く存在しているが、時間 t-方向に関しては線ではなく点として捉える方法が一般的である。このような現状の下、中尾氏ら[1][2]は初期値問題の解に対する数値的検証法を提案した。但し、この方法は基本解行列を直接解く必要があり、解析的手法としては素晴らしい一方、数値解析的手法（近似理論）としては一般的とは言えないものである。しかし、この方法は補間法を用いて結果として射影法と同様に扱うことにより誤差評価を求め、Nakao 法として発展方程式の解を検証するものであり、その中で導かれている誤差評価は数値解析的手法に大いに活用できるものである。本研究ではこの結果を活用することにより、これまでにない新たなアプローチにて発展方程式の解に対する数値的検証法を構築する。

これまで論文[3]において有限要素法による発展方程式に対する全離散数値的検証アルゴリズムを提案しており、この中で提案した有限要素スキームは以下である。

$$((u - P_h^k u)_t, \varphi)_{\Omega\times J} + \nu(\nabla(u - P_h^k u), \nabla\varphi)_{\Omega\times J} = 0, \forall\varphi\in S_h^k. \quad \text{(S1)}$$

但し、S_h^kはΩ×J 上の全離散有限要素近似空間であり、$(\cdot,\cdot)_{\Omega\times J}$はΩ×J 上の L^2-内積である。ここで問題となったのが射影 $P_h^k u$ の安定性である。空間方向微分に関しては解析的に安定となることが示せるが、時間方向微分に関しては解析的に示すことは難しく、よって、射影原理に基づいて行列固有値問題として解く方法（射影原理法）により

数値的安定性を期待した。しかし、u_tが安定的であることに反して$(P_h^k u)_t$は数値的安定性を示すことが出来ず、有限要素近似スキームの改良が必要であった。そこで、本研究ではテスト関数を時間方向微分した射影 $Q_h^k u$ の安定性を目的とした以下の有限要素スキームを提案する。

$$((u-Q_h^k u)_t,\varphi_t)_{\Omega\times J}+\nu(\nabla(u-Q_h^k u),\nabla\varphi_t)_{\Omega\times J}=0,\forall\varphi\in S_h^k. \quad \text{(S2)}$$

有限要素スキーム（S2）について考えると、一般的な（S1）と比較してその強みは強圧性を第 1 項に持たせていることにある。一般的に係数$\nu>0$ が小さいほど問題は難しくなるが、(S2)ではν が小さいほど第 1 項の強圧性が強く影響して安定的な有限要素スキームとなることが期待される。実際、時間方向微分については解析的に安定性を示めすことができ、他方、空間方向微分については射影原理法を用いて数値計算を行った結果、強い数値的安定性を確認している。

(2)数値的検証法の構築に際して、必要となるものは大きく構成的誤差評価と線形化作用素の逆作用素評価、および、時間発展的に検証する際の接続手法の開発の 3 つである。まず、構成的誤差評価については中尾氏らによる論文[1]の結果を活用することを考える。具体的には論文[1] で定義された擬似的な射影を R_h^k として、以下のように構成的誤差評価を得る。

$$\left\|\nabla(u-Q_h^k u)\right\|_{\Omega\times J}\le\left\|\nabla(u-R_h^k u)\right\|_{\Omega\times J}+\left\|\nabla(R_h^k u-Q_h^k u)\right\|_{\Omega\times J}$$

但し、$\|\cdot\|_{\Omega\times J}$はΩ×J 上の L^2-norm である。ここで右辺第 1 項については論文[1]の結果をそのまま活用することが出来、第 2 項については R_h^kが空間方向に関して補間（各点一致）となる事実より射影原理法により行列固有値問題として表現できることが分かっている。これを用いて実際に数値計算を行ったところ興味深い結果を得ることが出来た。空間方向の分割幅を h、時間方向の分割幅を k として、論文[1]において右辺第 1 項は $O(h^{-1}k)+O(h)$と評価されている。例えば、$(h,k)=(1/10,1/10)$と $(h,k)=(1/20,1/10)$の近似空間を比較すると感覚的には後者が良い近似空間のように思われるが論文[1]の結果はそうではないことを意味している。実際、第 2 項に対して射影原理法により数値計算を行った結果も論文[1]の理論的結果と殆ど同様の値を示した。更に、前述したように有限要素スキーム（S2）はν が小さいほど強圧的となるスキームとなっており、実際、ν が小さいほど早い段階で $O(h^{-1}k)$の影響がなくなり、すなわち、上記誤差評価右辺第 1 項よりも第 2 項が誤差のオーダーが高い数値結果を得ることが出来ている。これは、提案している有限要素スキーム(S2)が基本解行列を用いて各点を直接的に求めて得られた精度の高い近似解と同等の近似度が期待されるものであり、一般的な有限要素法の枠組みで計算可能であることは計算コストの削減および実装の簡便化に繋がることが期待される。更に、上記空間方向微分の誤差評価だけでなく、L^2-評価についても実際上有用な結果、特に、ν が小さいほどより有用な結果を得ている状況であり、発展方程式に対する数値的検証法の構築に必要な構成的誤差評価については既に完成している状況である。尚、この結果は論文[1]の著者である中尾氏、木村氏との共同研究として近々論文として発表予定である。

　次に、非線形問題の解を検証する為には Newton 法の縮小性が必要となり、それ故、得られた近似解での線形化作用素を考える必要がある。これまで非線形楕円型問題において Nakao 法の有用性は多くの研究者らによって実証されており、線形化作用素の取り扱いも様々な問題へ適用する中でいくつかの方法が提案されている。また、論文[2]において示されている定式化を参考にすることで線形化作用素の逆作用素評価はすでに完成している状況である。すなわち、現状において時間発展的に検証する際の接続手法を逐次反復などの解析的評価を用いることで、発展方程式の解に対する数値的検証法は完成している状況である。具体的な検証例としては発展型 Allen-Cahn 方程式に対して、一般的な初期値の下で T=20 付近で見かけ上定常解を形成する例に対して T=29 までの解を検証することが出来ている。尚、この結果は論文[1]の著者である中尾氏との共同研究として近々論文として発表予定である。但し、Allen-Cahn 方程式でここまでの検証結果を得た理由は、接続手法として、次の初期値の誤差の積み重なりにおいて逐次反復を基本としているものの、線形化作用素の部分的な強圧性を利用することで積み重なる誤差を小さく調整できている為であり、他の例で同様の結果を得ることが出来るかは未知である。すなわち、本研究では部分領域$\Omega\times(T_{i-1},T_i)$， $T_0=0<T_1<\cdots<T_n=T$ において領域内の検証に Nakao 法を適用することで領域内で分割幅を小さくすることにより部分領域内の誤差を小さく計画することはできる為、接続手法として逐次反復を選択したとしても小さく計画された誤差は次のステップの初期値に線形に反映されることになる。しかし、その線形性は解の挙動に依存することで安定した検証とはならない可能性を含んでいるのである。ゆえに、より汎用性ある数値的検証法の開発には接続手法として数値的手法の開発が必要となり、これが本研究の主目的である。

　発展方程式の初期値問題に対して、近似理論として最も用いられている有限要素法に

よる安定した全離散スキームはこれまでに提案されておらず、よって、その誤差評価もこれまで提案されたことはない現状である。更に、時間発展的なアプローチで境界部分に数値的手法を適用することもこれまで提案されていない状況である。従って、有限要素法による発展方程式の解に対する数値的検証法を構築することを目的とする本研究は学術的独自性と創造性を有するものと考えており、また、精度保証付き数値計算法の先進国である日本から世界に先駆けて発信することは先駆的独創性に富む特徴ある研究であると考えている。
(3)具体的な研究方法としては、部分領域内で検証された誤差を次のステップの初期値に反映する際、Newton 法を用いて線形でなく、高次に反映させることで積み重なる誤差を小さく見積もり、結果、安定した数値的検証法を構築していく。その為に部分領域で定義される全離散スキーム(S2)に対して、境界部分 T_i での誤差評価を利用して、境界部分に対して Nakao 法を適用する。これに関しては理論的な検討は行っており、適用は可能と考えている。尚、ここで必要となる誤差評価については L^2-norm に関しては O(h)の具体的な誤差評価が既に得られており、研究目的の達成には十分見通があると考えている。

[1] SIAM J. Numer. Anal. 51 [3] (2013), 1525-1541.
[2]Numer. Math., 126 (2014), 679-701.
[3]J. Math-for-industry 1 [2009A-9] (Apr. 2009), 69-72.

４．研究成果

熱方程式の初期値問題に対する新たな全離散有限要素を提案して、その数値的安定性を示した。また、中尾氏らの半離散スキームより構成される全離散スキームの誤差評価を用いて、提案手法の全離散有限要素スキームに対する構成的誤差評価を開発した。

- K. Hashimoto, T. Kimura, T. Minamoto, M.T. Nakao; Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equation, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 36[3] (Apr. 2019), 777-790.

熱方程式の初期値問題に対する新たな全離散有限要素スキームを用いて、非線形放物型方程式の初期値問題の解に対する数値的検証法を開発した。開発した手法は時間発展的に解を接続することで解軌道を検証するもので、Fujita-type 方程式の zero 解軌道や Allen-Cahn 方程式の安定定常解軌道の検証に成功した。

- K. Hashimoto, T. Kinoshita, M.T. Nakao; Numerical verification of solutions for nonlinear parabolic problems, Numerical Functional Analysis and Optimization, 41[12] (Jun. 2020), 1495-1514.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Hashimoto Kouji、Kimura Takuma、Minamoto Teruya、Nakao Mitsuhiro T.	４．巻 36
２．論文標題 Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equation	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	６．最初と最後の頁 777～790
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-019-00362-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kouji Hashimoto , Takuma Kimura , Teruya Minamoto , Mitsuhiro Nakao	４．巻 印刷中
２．論文標題 Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equation	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Kouji Hashimoto
２．発表標題 Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equation
３．学会等名 The 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2019)（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 橋本弘治
２．発表標題 非線形発展方程式の初期値問題に対する数値的検証法
３．学会等名 第24回情報・統計科学シンポジウ
４．発表年 2019年

1．発表者名 橋本弘治
2．発表標題 発展方程式の初期値問題に対する数値的検証法
3．学会等名 第2回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会（NVR 2018）（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 木下武彦，橋本弘治，中尾充宏
2．発表標題 非線形放物型方程式の解の検証における初期値分離型評価の包含効果抑制について
3．学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4．発表年 2020年

1．発表者名 水口信，関根晃太，橋本弘治，中尾充宏，大石進一
2．発表標題 藤田型方程式の解の爆発時間に対する計算機を用いた数値的包含方法について
3．学会等名 応用数学合同研究集会
4．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関