

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K04204

研究課題名（和文）非線形ロバスト制御理論への数理的アプローチの深化

研究課題名（英文）Deepening improvement of mathematical approach to nonlinear robust control theory

研究代表者

増淵 泉（Masubuchi, Izumi）

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：90283150

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：システム制御理論において、非線形システムや無限次元システムに関する理論の発展には深い数理的アプローチが必要である。本研究では、非線形システムの安定性解析に関して、リアプノフ密度を用いる方法を発展させ、時変システム、周期時変システムに対する安定性条件および逆定理に関する結果を導き、フィードバック制御則の設計に応用した。また、無限次元システムのフィードバック制御系設計の方法として、有限次元システムにおいて大きな貢献を残した線形行列不等式を用いる方法を拡張し、線形作用素不等式による状態フィードバック制御則の設計法を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

システム制御理論においては、有限次元線形システムを対象とした研究に関しては多くの有用な結果があり、また広く実用も行われている。他方、非線形システムや無限次元システムに関しては、その扱いの難しさから、多くの未解決の課題が残されている。本研究の成果は、数理的アプローチにより、非線形システムや無限次元システムのフィードバック制御系設計の新たな方向性を切り開くものであり、これまで知られていなかった安定性の条件や無限次元系の制御系設計問題の定式化を示している。

研究成果の概要（英文）：The research achievements include the extension of stability analysis of time-invariant nonlinear systems via Lyapunov densities to time-varying and periodically time-varying systems with converse theorems. These results are applied to feedback controller synthesis for nonlinear time-varying systems. Also the research contributes to the feedback controller synthesis of infinite-dimensional systems, by generalizing the method for finite-dimensional systems via linear matrix inequalities to infinite-dimensional systems via linear operator inequalities.

研究分野：システム制御理論

キーワード：非線形システム 安定性解析 時変システム リアプノフ密度 非線形ロバスト制御 非線形ゲインスケジュールド制御 無限次元システム 作用素不等式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

システム制御理論は、工学理論の一つの重要な分野であり、多くの豊かな結果をもたらしている。しかしながら、現在でも多くの課題を残している研究のフロンティアとして、非線形システムや無限次元システムに関する理論がある。対象となるシステムの扱いの難しさから、深い数理的アプローチが必要である。本研究課題に関する背景は以下のようなものである。

(1) 非線形システムの安定性解析

非線形システムの安定性解析は、システム制御理論の基礎を与える重要な研究課題である。非線形システムに対しては、リアプノフの方法が最も広く用いられ、制御系設計を含めた多くの結果がリアプノフの方法に基づいている。一方、リアプノフ密度と呼ばれる、状態空間の測度を与える関数の存在により、有限次元非線形時不変システムの安定性を保証する方法が提案された[6]。ここでの安定性は、状態空間のほとんどすべての初期値に対するシステムの応答が所定の平衡点に収束することを指す。リアプノフ関数による安定性解析とは全く異なる原理による方法であり、また非線形状態フィードバック制御則の設計問題を、自然に凸最適化問題に帰着できるという特長がある[7]。種々の拡張が行われており、研究代表者も以前よりこの方法論に携わってきたが、未解決の問題も多く残されており、さらなる研究が必要である。

(2) 無限次元線形システムの解析・フィードバック制御系設計

無限次元線形システムの解析やフィードバック制御系設計は、有限次元システムに対するものと同等の重要性があると考えられるが、その扱いの難しさから、有限次元システムと比較して成果が得られていない問題が多く存在する。特に、作用素半群の一般論に基づく制御系の解析や結果は、拡散方程式や波動方程式などの特定のクラスを対象とするものに比べると多くないようである。これは、有限次元システムの場合と異なり、各クラスのシステムの数理的性質に異なる点が多いためと思われるが、その一方で、各種のシステムに共通する性質の研究や制御系設計のアプローチの構築も重要である。従来では最適制御などに関する成果が無限次元システムに対して拡張されているものの、有限次元システムで大きな成果をあげた方法論で無限次元システムに適用されていないものは依然として多い。

その一つとして、有限次元システムにおいてフィードバック制御系設計問題の解決に大きな貢献を残した線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, 以下 LMI) による制御系設計法のアプローチ (Masubuchi et al. (文献[8]) など) があげられる。ここで LMI には、制御系のリアプノフ関数や蓄積関数となる二次形式を与える対称行列値の変数と、フィードバック補償器の状態空間実現に対応する(ただし、変数変換を施されている)行列値の変数が含まれる。無限次元システムにおいては、これらの行列は作用素となり、LMI は線形作用素方程式と呼ぶべきものとなる。無限次元システムの制御問題を何らかの形で LMI を解く問題に帰着し、凸最適化によって効率よく LMI を解いて制御則を求めるアプローチは行われているものの、解析・設計のための一般的な作用素不等式を出発点とする研究はあまり行われていない。

2. 研究の目的

上述の背景のもとで、有限次元非線形システムと無限次元線形システムの解析と制御について、以下の課題の解決を目的として研究を行った。

(1) 非線形システムの安定性解析として、リアプノフ密度による方法の拡張を、特に時変非線形システムに対して行う。この課題の成果により、時変の不確かさの下でのロバスト安定性の解析やロバスト制御、時変のパラメータによるシステムの特性変動の情報を利用するゲインスケジュールド制御を非線形システムに対して拡張することが可能になる。

(2) 有限次元システムに対する LMI アプローチの拡張として、無限次元システムの解析・設計を作用素不等式で行う方法論を構築する。扱うシステムのクラスとして、ヒルベルト空間上の作用素半群の生成作用素を伴う状態方程式で表されるシステムを考える。有限次元系の LMI アプローチでは、複数の制御仕様を達成するために、各仕様に対する LMI を連立する方法や、不確かさの下でロバスト制御系設計を行うために種々の LMI が用いられているが、線形作用素不等式を用いてこれらに平行する結果を無限次元システムに拡張する。

3. 研究の方法

研究の方法は、目的を達するリアプノフ密度や線形作用素不等式の条件に対する理論的考察が主である。また、解析法や設計法の有効性を検証するため、数値計算によりリアプノフ密度や線形作用素不等式の解を半正定値計画に基づいて実装する。

4. 研究成果

(1) 非線形システムの安定性解析

時変システムに対するリアプノフ密度による安定性解析

有限次元非線形時変システム $dx/dt=f(t, x)$ に対して、時間 t 及び状態変数 x の関数であるリアプノフ密度 $\rho(t, x)$ の存在により、つぎの[a], [b]を保証する条件を明らかにした。以下では、 $[t_0, \infty)$ の形の部分集合を時間軸と呼ぶ。ここで t_0 は考慮すべき初期時刻の最小値である。

- [a] 時間軸と状態空間の積集合の部分集合 S が正不変集合である。
[b] 集合 S のほとんどすべての初期データ (初期時刻と初期状態の組) に対するシステムの解が所定の平衡点 (以下状態空間の原点とする) に収束する。
ここで、時間と状態の関数であるリアプノフ密度の条件はつぎのようなものである。

- (I) 集合 S 上の $x \neq 0$ なる点で $\rho(t, x) > 0$ 。
- (II) 集合 S の境界で $\rho(t, x) = 0$ 。
- (III) 集合 S 上のほとんどすべての (t, x) において $[\rho_t + x \cdot (f\rho)](t, x) > 0$ 。
- (IV) 集合 S のある部分集合上での $\rho(t, x)$ の (t, x) に関する重み付き積分が有限となる。

これらの条件において、正不変性の条件が課せられていない場合 (すなわち、上記において S を時間軸と状態空間の積集合全体とした場合) については研究開始前に部分的に結果が得られていたが[9]、本研究ではリアプノフ密度の存在によって時変システムの正不変性も解の収束と同時に保証できることを示した。この成果は文献[1]に発表した。

周期時変システムに対するリアプノフ密度による安定性解析

対象が周期系である場合、すなわちベクトル場を時間方向に一定値 T だけシフトするともとのベクトル場と一致する場合には、それを用いて で示した条件(I) ~ (IV)をつぎの(I') ~ (IV')のように簡単にできる。以下では上記のような T を周期と呼ぶ。また、における時間軸はここでは実数全体とし、集合 S もベクトル場と同様に時間軸方向への一定値 T のシフトで不変であるとする。集合 S を時間軸方向において $[0, T]$ に制限した集合を S_T で表す。

- (I') 集合 S_T 上の $x \neq 0$ なる点で $\rho(t, x) > 0$ 。
- (II') 集合 S_T の状態変数方向の境界で $\rho(t, x) = 0$ 。
- (III') 集合 S_T 上のほとんどすべての (t, x) において $[\rho_t + x \cdot (f\rho)](t, x) > 0$ 。
- (IV') 区間 $[0, T]$ 上の各時刻 t において、集合 S_T の時刻 t での断面のある部分集合上での $\rho(t, x)$ の x に関する重み付き積分が有限となる。

これにより[a], [b]が成り立つことが保証される。ここで、リアプノフ密度としても時間について周期 T のもののみを考えてよい。

積分の条件において、では時間について + までの積分が含まれるのに対し、では周期性を活用した証明により時間についての積分が不要となる、すなわち状態空間上での積分でよいため、リアプノフ密度を求めるのが大幅に簡単になる。例えば、ではリアプノフ密度は必ず時間に依存する必要があったが、では時間に依存しなくてもよい。以上の成果は文献[1]で発表した。

リアプノフ密度の存在

時変システムにおいて の[a], [b]が満たされるとき、ベクトル場に関する緩やかな仮定の下で、条件(I) ~ (V)を満たすリアプノフ密度の存在を証明した。ベクトル場が時間について周期 T を持つ場合には、条件(I') ~ (IV')を満たす時間について周期 T を持つ関数の存在が示される。この結果は、や で示した条件が[a], [b]のための単なる十分条件ではなく、ある仮定の下では必要条件であることを意味しており、理論的には非常に重要である。この結果は文献[1]で発表した。

時変のパラメータを持つ非線形システムに対する、リアプノフ密度を用いたロバスト制御則およびゲインスケジュールド制御則の設計

研究開始当初の項目でも述べたように、時不変システムにおいては、リアプノフ密度による安定性条件を満たす非線形状態フィードバック則の設計を凸最適化問題に帰着することができる。しかし、時変のパラメータ $\theta(t)$ を不確かさとして持つ非線形システムのロバスト制御問題においては、状態フィードバック則は不確かさのパラメータを利用できないため、状態変数のみに依存した関数でなければならないが、この条件を凸最適化の枠組みで実現するのは困難である。そこで、リアプノフ密度を状態変数のみの関数 $\rho_0(x)$ と $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) の積の形とすることで、凸最適化問題に帰着する方法を試みた。この場合、条件(I) ~ (IV)は状態空間上での $\rho_0(x)$ のみの条件に帰着される。この結果を文献[2]で示した。

ゲインスケジュールド制御においては、各時刻 t において時変のパラメータ $\theta(t)$ を状態フィードバック則で利用できる。この場合は、時間を変数に含むリアプノフ密度の条件を時不変の場合と同様に凸最適化問題に帰着できる。さらに文献[3]において、リアプノフ密度の形を $\rho_0(\theta, x)$ と $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) の積の形とすることで、 $\rho_0(\theta, x)$ が満たすべき条件を簡単にした上でゲインスケジュールド制御則の適用を行った。上述の形とすることで、条件(IV)における積分の条件が、パラメータ θ の各値における、 x のみに関する積分の有限性に帰着でき、扱いが容易になる。

リアプノフ密度の積分に関する条件の緩和

で述べた、積分に関する条件(IV)により、正值をとるリアプノフ密度は時間とともに減衰する必要があるが、他方条件(III)は $\rho_t(t, x)$ が負であると成り立ちにくい。で述べた方法では、積分の条件(IV)では時間 t についての積分を排除することができているが、リアプノフ密度の形を限定したために条件(III)の不等号がより厳しい条件に置き換わっている。これを緩和するため、ベクトル場のスケール変換や、時変パラメータ $\theta(t)$ のダイナミクスの情報を利用する方法を検討した。

(2) 無限次元線形システムの解析・フィードバック制御系設計

有限時間線形システム $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$ に対する安定化状態フィードバック制御 $u(t) = Fx(t)$ の設計においては、リアプノフ不等式 $P = P^T > 0, (A+BF)P + P(A+BF)^T < 0$ を利用するアプローチが広く用いられている。特に、変数変換 $W = FP$ によって未知数 P, W についての線形行列不等式 (LMI) $P = P^T > 0, (AP+BW) + (AP+BW)^T < 0$ に帰着させる方法が非常に有力であり、安定化のみならず様々な設計仕様やロバスト制御、ゲインスケジュールド制御の設計に応用されている。本研究ではこれをヒルベルト空間上の無限次元系に対して拡張した。

対象とするシステムは、形式上は有限次元の場合と同様に $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$ なる形で線形システムとして表されるが、 $x(t), u(t)$ はそれぞれヒルベルト空間 X, U に属し、 A は X 上の作用素半群の生成作用素、 B は有界作用素とする。この問題設定には ODE-PDE 系を含めた種々の応用がある。有限次元システムの場合の線形行列不等式は、有界作用素 P, W (ただし P はエルミート作用素) に関するつぎの線形作用素不等式となる。

$$\begin{aligned} & \|x\|_2^2 < x, Px > & \|x\|_2^2, & & x & X \\ < x, (PA^* + W^*B^*)x > + < (PA^* + W^*B^*)x, x > < - & \|x\|_2^2 & x & D(A^*) \end{aligned}$$

生成作用素 A が一般に非有界であることから、それへの対応として、エルミート形式の変数 x の属する空間を A の双対作用素 A^* の定義域としている。上式が解を持てば、 P には逆作用素が存在し、 $F = WP^{-1}$ によって安定化状態フィードバックゲインが得られる。

このアプローチについては、文献[4]において、 A^* の定義域を用いるアイデアの原型を示し、文献[5]において、上記の不等式またはその拡張を用いて、安定化、閉ループ系の固有値の存在領域、入力 L_2 ノルムの仕様を扱う方法を示した。特に文献[5]では、作用素 A のある種の不確かさのもとで、これらの制御性能を同時に、かつロバストに達成する状態フィードバックゲインの設計法を示した。さらに、これらの方法を熱方程式を含む ODE-PDE 系の例題に適用し、実際に制御則を求めた。

(3) まとめ

非線形システムの安定性解析については、非線形時変システムに対するリアプノフ密度を用いた安定解析法において、手厚く結果を得ることができた。特に文献[1]では、一般の非線形時変システムに対する解の収束性と正不変性、周期時変システムに特化した解の収束性と正不変性、およびそれぞれに対するリアプノフ密度の存在定理について結果を示しており、一本の論文としては豊富な内容になっている。無限次元システムに対する線形作用素不等式アプローチについては、非有界作用素 A の定義域の扱いに注意を払いながら、エルミート形式を与える作用素が逆作用素を持ち得る定式化を示した。これらの成果は今後の理論の発展に寄与するものであると考えている。

<引用文献>

- [1] I. Masubuchi and T. Kikuchi: Lyapunov density criteria for time-varying and periodically time-varying nonlinear systems with converse results, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 59, No. 1, pp. 223-241 (2021)
- [2] I. Masubuchi: On robust feedback control of nonlinear systems with time-varying uncertainties via Lyapunov densities, *Proceedings of the SICE Annual Conference 2021*, pp. 1004-1006 (2021)
- [3] I. Masubuchi: On gain-scheduled control of nonlinear systems: synthesis via Lyapunov densities, *Proceedings of the SICE Annual Conference 2022*, pp. 345-346 (2022)
- [4] I. Masubuchi: Operator inequality approach for state-feedback stabilization of infinite-dimensional systems: synthesis via dual of input-to-state operator, *Proceedings of the 21st IFAC World Congress*, pp. 7788-7791 (2020)
- [5] I. Masubuchi: A multi-objective state-feedback synthesis for infinite-dimensional systems based on linear operator inequalities in the conjugate space, *Proceedings of the 13th Asian Control Conference*, pp. 1256-1261 (2022)
- [6] A. Rantzer: A dual to Lyapunov's stability theorem, *Systems & Control Letters*, Vol. 42, pp. 161-168 (2001)
- [7] S. Prajna, P. A. Parrilo, and A. Rantzer: Nonlinear control synthesis by convex optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 2, pp. 310-314 (2004)
- [8] I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda: LMI-based controller synthesis: a unified formulation and solution, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, No. 8, pp. 669-686 (1998)
- [9] I. Masubuchi and T. Kikuchi: Lyapunov density for almost attraction of nonlinear time-varying systems: a condition without assuming local stability, *Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 196-173 (2017)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Izumi Masubuchi	4. 巻 -
2. 論文標題 A multi-objective state-feedback synthesis for infinite-dimensional systems based on linear operator inequalities in the conjugate space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the 13th Asian Control Conference	6. 最初と最後の頁 1256-1261
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi Masubuchi	4. 巻 -
2. 論文標題 On gain-scheduled control of nonlinear systems: synthesis via Lyapunov densities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the SICE Annual Conference 2022	6. 最初と最後の頁 345-346
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi Masubuchi	4. 巻 -
2. 論文標題 On robust feedback control of nonlinear systems with time-varying uncertainties via Lyapunov densities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the SICE Annual Conference 2021	6. 最初と最後の頁 1004-1006
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masubuchi Izumi、Kikuchi Takahiro	4. 巻 59
2. 論文標題 Lyapunov density criteria for time-varying and periodically time-varying nonlinear systems with converse results	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Control and Optimization	6. 最初と最後の頁 223 ~ 241
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/19M1291479	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi Masubuchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Operator inequality approach for state-feedback stabilization of infinite-dimensional systems: synthesis via dual of input-to-state operator	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 21st IFAC World Congress	6. 最初と最後の頁 7788-7791
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi Masubuchi	4. 巻 -
2. 論文標題 An extended Lyapunov-density condition for nonlinear time-varying systems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd IFAC World Congress	6. 最初と最後の頁 4889-4894
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 増淵泉
2. 発表標題 作用素不等式による無限次元系の安定化状態フィードバック制御の設計について
3. 学会等名 第64回システム制御情報学会研究発表講演会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大園 隼人, 増淵 泉
2. 発表標題 共役空間における線形作用素不等式を用いた無限次元系の状態フィードバック系設計
3. 学会等名 第65回システム制御情報学会研究発表講演会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Izumi Masubuchi
2. 発表標題 Almost-everywhere convergence analysis for periodically time-varying nonlinear systems via Lyapunov densities
3. 学会等名 SICE Annual Conference 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 菊池貴大, 増淵泉
2. 発表標題 リアプノフ密度による非線形システムの指数収束性の新たな解析法
3. 学会等名 平成30年度計測自動制御学会関西支部・システム制御情報学会 若手研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 増淵泉
2. 発表標題 リアプノフ密度による時変非線形システムの収束性の解析について
3. 学会等名 第6回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 増淵泉
2. 発表標題 時変の不確かさを持つ非線形システムの解の外収束性を保証するリアプノフ密度の条件の改善
3. 学会等名 第11回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------