

令和 4 年 6 月 14 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K04318

研究課題名(和文)変位場の仮定を用いない高精度な一般化梁理論の構築

研究課題名(英文) Development of highly accurate generalized beam theory without any assumption of the displacement field

研究代表者

齊木 功 (Saiki, Isao)

東北大学・工学研究科・准教授

研究者番号：40292247

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：薄肉幅広断面や、複雑な構成の複合断面の梁においては、断面が変形することで、従来の梁理論では精度のよい解析が困難であった。本研究では、数学的均質化法を梁に適用した手法を用いて、断面の変形をより高精度な有限要素により求め、この結果を断面パラメータとして組み込むことのできる新しい梁理論を構築した。この成果により、これまでの梁理論では扱うことが困難であった構造においても精度のよい解析が可能となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

細長いという前提条件のもとに成り立つ梁理論は、実際には細長くない薄肉幅広断面の構造物にも用いられている。そのために、「補正」という形で対処法的な修正が行われている。本研究の成果によれば、梁理論に断面変形を陽に取り入れることができるので、計算負荷の高い有限要素を用いずに高精度な解析が可能である。さらに、断面を基準とする設計においても容易に適用が可能である。

研究成果の概要(英文)：For beams with thin-walled wide cross-sections or complex composite cross-sections, deformation of the cross sections deteriorates accuracy of the conventional beam theory. In this study, a mathematical homogenization method is applied to beams to obtain the deformation of the cross section via finite element models with higher accuracy, and a new beam theory that can incorporate this result as a cross-sectional parameter is developed. The developed beam theory realizes accurate analysis of structures which the conventional beam theory has difficulty to treat.

研究分野：応用力学

キーワード：梁理論 断面変形 せん断補正係数 せん断遅れ Poisson効果 均質化法 代表体積要素

### 1. 研究開始当初の背景

有限要素解析の技術と情報処理能力が向上した今日においては、橋梁全体をより自由度の高いシェル要素やソリッド要素（以下、シェル要素等と記す）でモデル化するような高精度な解析も線形計算や研究レベルでは可能となった。ただし、実務的には、シェル要素等の計算負荷の高い解析は、部材の剛結部など特別な配慮が必要な個所にのみ部分的に用いられる。一方、耐震解析のような負荷の高い解析や、設計の初期段階には、一般に梁要素が使われることから、梁理論は設計において必要不可欠である。計算機能力がさらに向上し、橋梁全体をシェル要素等で短時間に非線形解析ができるようになったとしても、梁理論は、1.モデル化が容易であること、2.骨組構造の設計が「断面」を基本としていること、の2点から、設計において不要とはならないと考えられる。

比較的新しい土木学会の示方書<sup>1)</sup>などでは、設計における構造解析は「...信頼性と精度があらかじめ検証された解析モデルならびに適切な解析法を用い...」とあり、どのような解析モデルを用いるかは設計者に委ねられている。さらに、同示方書において、部分係数設計法で用いる構造解析係数は、用いる解析モデルに関する言及はなく、線形解析の場合1.0でよい、とされている。しかし、少数主桁橋のように支間に対して桁高が十分に小さくない場合や、長大橋の補剛桁のように支間（吊材や支材の間隔）に対して幅が十分に小さくない場合などでは梁要素による解の精度が低下する。部分係数設計法への本格的な移行を鑑みれば、対象とする構造の幾何学的・力学的特性と用いる解析モデルによる精度の関係についての研究成果は十分であるとは言えない状況である。この問題を解決するためには、梁理論の解析精度と適用限界を明らかにすることが必要であると考えられる。

### 2. 研究の目的

前節で述べた学術的背景より、本研究の目的は、断面変形を統一的に扱える梁理論を開発し、梁理論の精度・適用範囲を改善・拡大することである。

### 3. 研究の方法

断面変形を統一的に扱うために、これまでの研究成果を単に組み合わせるだけでは革新的な成果は得られない。その理由は、これまでの断面変形に関する研究のほとんどが、理論解析に基づいており、任意形状の断面や複数の材料からなる複合断面に適用することが事実上不可能だからである。断面変形を考慮するためには、せん断力や曲げやねじりを受けた梁の断面がどのような形状で変形するか、という情報が必要である。この形状を「断面変形モード」と呼ぶこととする。ある特定の断面に対する断面変形モードは連続体力学のつり合いによって得られる。これまでの解析的研究では、矩形やI形・箱形といった単純な断面形状に関する断面変形モードを主として級数解などで求めていた。そのため、任意形状や複数材料からなる断面に適用することは不可能であった。一方、申請者は複合材料の平均化手法として研究されてきた数学的均質化法を、梁や板といった構造に適用する研究を行ってきた<sup>2)</sup>。この成果として任意形状断面の梁に適用可能な均質化法を開発した<sup>3)</sup>。申請者の方法によれば、梁の代表体積要素に曲げ変形・せん断変形・ねじり変形といった梁の基本的な変形を周期境界条件のもとで与えることで、平均的な力学特性がその反力として得られる。例えば、せん断変形に着目すると、代表体積要素は全体としてせん断変形するとともに、断面内では一様でないせん断変形を呈する。また、対象がI形や箱形のような薄肉断面であれば、代表体積要素のフランジにせん断遅れが観察される。このように、梁の代表体積要素の解析から断面変形モードを数値的に求めることができる。つまり、梁の変位場や断面変形モードをあらかじめ仮定する必要がない。さらに、このために必要な解析は、梁の一部分だけを取り出した代表体積要素の解析だけなので、橋梁全体の解析に比べると無視できるほどの計算負荷である。

長さ $l$ の長さ方向に一様な任意形状断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を $x_1$ 、梁軸直角水平方向を $x_2$ 、鉛直方向を $x_3$ とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を $A$ とする。断面に $x_2$ 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸と、 $x_3$ 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸の交点を $x_2, x_3$ の原点とする。ここで、任意形状断面の全断面領域において、せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合して断面変形の変位場を $f(x_2, x_3)$ とすることを提案する。梁の断面の回転を $\theta(x_1)$ 、断面変形の変位場 $f$ に対する一般化変位を $g(x_1)$ とすると、梁の軸方向変位場は $u_1 = x_3 \theta + f(x_2, x_3) g(x_1)$ と表すことができる。断面の平均的な横せん断変形をTimoshenko梁と同様に断面の回転とたわみ角の差として

$$\tilde{\gamma}(x_1) := \theta(x_1) - (-u_3')$$

と定義する。ここに $(\cdot)'$ は $x_1$ に関する導関数を表す。この変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3 \theta' + f g'$$

$$\gamma_{12} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = f_2 g$$

$$\gamma_{13} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \tilde{\gamma} + f_3 g$$

となる。ここに、 $(\cdot)_{,i}$ は $x_i$ に関する偏導関数を表す。

解析領域を $V := L \times A$ とし、単位軸方向長さ当たりの $x_3$ 方向の分布荷重 $q(x_1)$ と境界条件としての表面力 $p_i (i = 1, 3)$ を考慮した仮想仕事式は

$$\int_V \{E \epsilon_{11} \delta \epsilon_{11} + G(\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13})\} dV = \int_L q \delta u_3 dx + \int_{\partial V} \{p_1 \delta u_1 + p_3 \delta u_3\} dA$$

と表せる。上式に変位場を考慮すると、最終的に弱形式の支配方程式

$$\int_L \{K_b \theta' \delta \theta' + R_1 g' \delta \theta' + R_1 \theta' \delta g' + R_2 g' \delta g' + (K_s \tilde{\gamma} + R_4 g) \delta \tilde{\gamma} + (R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g) \delta g\} dx_1$$

$$= \int_L q \delta u_3 dx_1 + (\bar{M} \delta \theta + \bar{D} \delta g + \bar{Q} \delta u_3)|_{x=0,1}$$

を得る。ここに、 $K_b, K_s$ はそれぞれ合成断面の曲げ剛性およびせん断剛性、 $R_i$ は断面変形に関するパラメタであり

$$K_b := \int_A E (x_3)^2 dA, \quad K_s := \int_A G dA,$$

$$R_1 := \int_A E x_3 f dA, \quad R_2 := \int_A E f^2 dA, \quad R_3 := \int_A G \{(f_2)^2 + (f_3)^2\} dA, \quad R_4 := \int_A G f_3 dA$$

と定義した。弱形式の支配方程式を部分積分することで、強形式の支配方程式

$$K_b \theta'''' + R_1 g'''' + q = 0$$

$$-K_b \theta'' - R_1 g'' + K_s \tilde{\gamma} + R_4 g = 0$$

$$-R_1 \theta'' - R_2 g'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g = 0$$

を得る。これらはそれぞれ曲げモーメント、せん断力、断面変形に関するつり合い式である。

#### 4. 研究成果

単一材料の箱断面の梁を選択し、提案した梁理論の精度を検証する。箱断面の寸法は幅 $b = 80$ 、高さ $h = 20$ 、ウェブ厚 $t_w = 1$ 、フランジ厚 $t_f = 3$ とした。材料は等方弾性体とし、Young率は $E=1$ 、Poisson比はゼロとした。この断面の幅と高さの比は冒頭で述べた長大橋の補剛桁で採用されるものと同じ程度である。

この箱断面梁に対して、本提案梁理論で採用する変位場に必要断面変形モード $f(x_2, x_3)$ を求めるために、文献<sup>4)</sup>に基づき有限要素離散化した代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた。代表体積要素は1辺0.5の寸法の立方体形状の1次6面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した。断面当たりの要素数は2,032となった。

代表体積要素の解析結果として得られる断面内各点の軸方向変位が $f$ である。得られた $f$ の分布を図1に示す。同図(a)は $x_2$ - $x_3$ 面で見た代表体積要素であり、色は $f$ 、すなわち軸方向変位を表す。この $f$ を用いてパラメタ $R_i$ を評価した。同図(b)は $x_1$ - $x_3$ 面で見た代表体積要素の変形であり、色は $\gamma_{13}$ を示す。箱断面のウェブ部分が $x_2$ 軸周りに回転しているように見えるが、上フランジが $x_1$ の負の方向に、下フランジが正の方向にせん断遅れ変形していることで断面全体としては回転がゼロとなっている。また、この箱断面は上下フランジがウェブに比較して厚いが、フランジ断面はほぼ剛体回転しており、横せん断ひずみ $\gamma_{13}$ もゼロに近い。同図(c)は $x_1$ - $x_2$ 面で見た代表体積

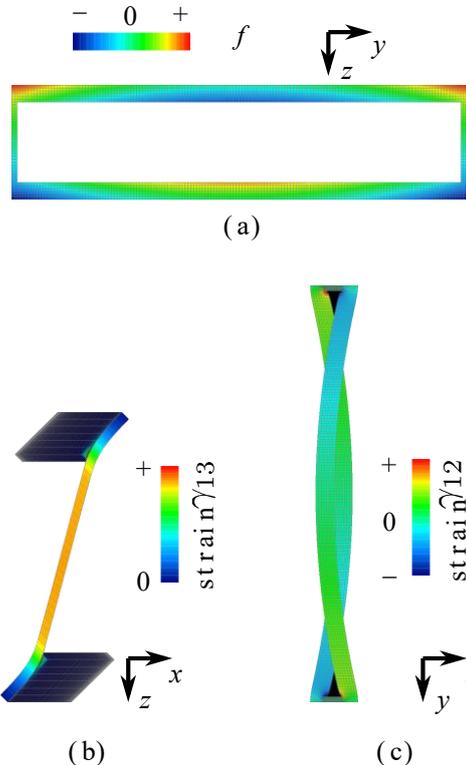


図1 箱断面梁の代表体積要素のせん断変形

要素の変形であり、色は $\gamma_{12}$ を示す。単純な箱断面であるため、上下フランジに見られるせん断遅れ変形は Reissner<sup>5)</sup>が仮定した放物線に近い。

単純支持梁の境界値問題を考え、通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする。本提案手法による解を参照解と比較しその精度・妥当性を評価する。支間長 $l = 400$ とし、細長比は約 48 である。比較対象としたソリッド要素によるモデルの要素寸法は代表体積要素と同じ 1 辺 0.5 の立方体とし、総要素数は 812,800 要素である。分布荷重はウェブに相当する要素に物体力として载荷した。ヒンジ支点は支点上の全ての節点を $x_3$ 方向に拘束してモデル化した。対称条件は対称面上のすべての節点を $x_1$ 方向に拘束してモデル化した。

本手法と参照解および Euler-Bernoulli 梁によるたわみ $\bar{w}$ を図 2 に示す。たわみは Euler-Bernoulli 梁による支間中央のたわみで無次元化している。なお、参照解のたわみは断面の平均たわみである。また、同図には Reissner の方法によりせん断遅れを考慮した梁のたわみ (Timoshenko 梁の横せん断によるたわみを含む) も比較のために示している。径間中央の最大たわみで、参照解は Euler-Bernoulli 梁に対して 17% 程度大きい。参照解との差で比較すると、径間中央たわみと  $L^2$  ノルムの双方で、本手法は Timoshenko 梁 や Reissner の方法の 200 分の 1 以下程度であり、参照解に対する精度が最も良かった。Reissner の方法の精度が Timoshenko 梁に対して改善していない理由は、Reissner の方法ではフランジが非常に薄いという仮定を用いているが、本例題ではフランジ厚が断面高さに対して 15% と薄くないためであると考えられる。

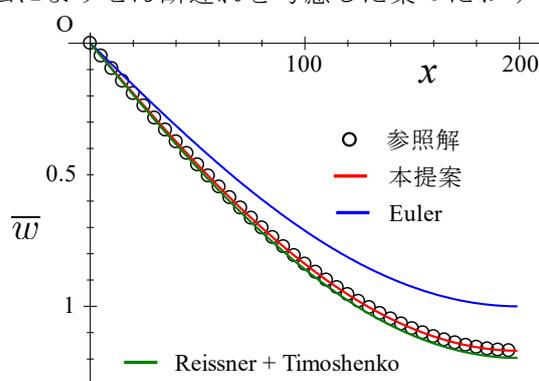


図 2 箱断面梁のたわみ

本手法と参照解および Euler-Bernoulli 梁と Reissner による 軸ひずみ $\bar{\epsilon}$ を図 3 に示す。同図は引張側フランジの橋軸直角方向中央と端部 (ウェブ外側) のそれぞれにおいて 軸ひずみの軸方向分布を示している。フランジの板厚方向の位置は最外縁であり、該当する要素内の平均値を採用した。Euler 梁は橋軸直角方向には一樣なので橋軸直角方向位置による区別はない。それぞれの軸ひずみは Euler 梁の支間中央の軸ひずみにより無次元化している。フランジのせん断遅れにより、橋軸直角方向中央部の軸ひずみは Euler 梁の軸ひずみよりわずかに (参照解で 0.7% 程度) 小さく、橋軸直角方向端部 (ウェブ上) で 6% 大きい。本手法による解は参照解と図においてほぼ重なっている。一方、Reissner による解は、ひずみが端部で大きく中央部で小さいというせん断遅れの定性的な傾向は表現できているが、全体的にひずみを過小評価している。Euler 梁はせん断遅れを考慮していないので相対差が大きくなるのは当然であるが、Reissner による解も Euler 梁に対して定量的には精度を改善できていない。それに対して、本手法は相対差 $10^{-6}$ という良い精度で参照解を再現できた。

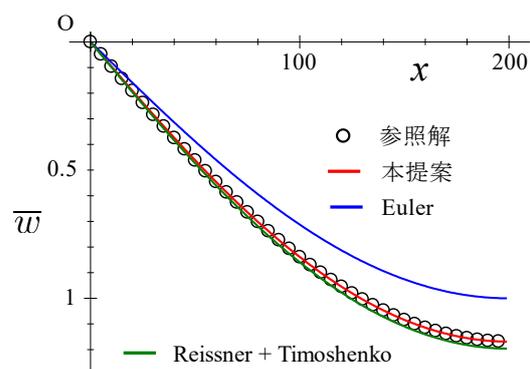


図 3 箱断面梁の軸ひずみ

以上述べたように、本研究により、これまでの梁理論で精度よく再現することが困難であった薄肉幅広断面に対しても、精度のよい解析が可能となる断面変形を考慮した新しい梁理論を構築することができた。

#### <引用文献>

- 1) 土木学会, 鋼・合成構造標準示方書, 総則編・構造計画編・設計編, 2016.
- 2) 斉木 功, 佐野道徳, 中島章典, はり・平板構造に対する均質化理論の適用に関する一考察, 土木学会応用力学論文集, Vol. 7, pp. 407-413, 2004
- 3) 鐘 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫, 非均質な Timoshenko 梁の平均物性評価, 土木学会論文集 A2, Vol. 68, pp. I\_161-I\_169, 2012.
- 4) 斉木 功, 藤本竜太, 山本剛大: 非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol. 74, pp. I 3-I 11, 2018.
- 5) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, Q. Appl. Math., Vol. 4, No. 3, pp. 268-278, 1946.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 HOSHIYA Miyu, SAIKI Isao, YAMAMOTO Takeki	4. 巻 76
2. 論文標題 A STUDY OF CONNECTING SOLID AND BEAM ELEMENTS WITH CROSS-SECTIONAL DEFORMATION	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 I_183 ~ I_191
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.76.2.I_183	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 SAIKI Isao, ZHENG Xun	4. 巻 77
2. 論文標題 A BEAM THEORY WITH CROSS-SECTIONAL DEFORMATION DUE TO BOTH SHEAR LAG AND TRANSVERSE SHEAR	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 1 ~ 11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.77.1_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 SAIKI Isao, ZHENG Xun, YAMAMOTO Takeki	4. 巻 75
2. 論文標題 SHEAR DEFORMABLE BEAM THEORY WITH WARPING INDEPENDENT OF SHEAR DEFORMATION	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 I_3 ~ I_12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.75.2.I_3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 SAIKI Isao, FUJIMOTO Ryuta, YAMAMOTO Takeki	4. 巻 74
2. 論文標題 ON THE ROTATION OF THE CROSS SECTION FOR THE EVALUATION OF THE SHEAR STIFFNESS OF BEAMS WITH HETEROGENEOUS CROSS SECTION	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 I_3 ~ I_11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.74.I_3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 SAIKI Isao, TABUCHI Ko	4. 巻 77
2. 論文標題 A BEAM THEORY CONSIDERING CROSS-SECTIONAL DEFORMATION DUE TO THE POISSON EFFECT	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))	6. 最初と最後の頁 1_59 ~ 1_68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2208/jscejam.77.2_1_59	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件(うち招待講演 0件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 田淵 航
2. 発表標題 Poisson効果による断面変形を考慮した一般化梁の定式化とその有限要素の開発
3. 学会等名 土木学会東北支部技術研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星屋 美優
2. 発表標題 断面変形を考慮した梁の動的特性に関する検討
3. 学会等名 土木学会東北支部技術研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三井涼平
2. 発表標題 断面変形梁理論に基づくせん断遅れによる付加的な応力の評価
3. 学会等名 土木学会東北支部技術研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星屋 美優
2. 発表標題 断面変形を考慮した梁要素と連続体要素の接続に関する検討
3. 学会等名 応用力学シンポジウム
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 星屋美優・斉木 功・山本剛大
2. 発表標題 断面変形を考慮した梁要素と連続体要素の接合に関する考察
3. 学会等名 土木学会東北支部技術研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鄭 勲・斉木 功・山本剛大
2. 発表標題 せん断に伴う断面変形を考慮した梁理論に関する考察
3. 学会等名 土木学会東北支部技術研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 青木洋樹・斉木 功・大竹 雄・三井涼平
2. 発表標題 せん断遅れによる付加的な応力評価のための機械学習による断面特性推定の試み
3. 学会等名 土木学会東北支部技術研究発表会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------