

令和 5 年 6 月 27 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K11164

研究課題名(和文) 制約充足問題に対するアルゴリズムの深化と新展開

研究課題名(英文) Algorithms for Constraint Satisfaction Problems: Deepening and New Directions

研究代表者

玉置 卓 (Tamaki, Suguru)

兵庫県立大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：40432413

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：制約充足問題は様々な分野に現れる普遍的な組合せ問題である。制約充足問題は、その記述能力の高さゆえに、NP困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。本課題では、制約充足問題に対する効率の良い厳密および近似アルゴリズムの設計とその解析を行った。結果として、重み付対称素子を持つ限定段数回路の充足可能性問題、交差数でパラメタ付けられた最大カット問題に対する改良された厳密アルゴリズムを得た。また、最小線形配置問題に対して、高階固有値を利用した近似アルゴリズムも与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

制約充足問題は、普遍的な組合せ問題として、様々な分野(理論計算機科学、数理論理学、人工知能、オペレーションズリサーチ、離散数学、統計物理など)で研究されている。本課題の観点であるアルゴリズム理論・計算理論においては、最も基本的な研究対象のひとつである。本研究の成果は学術的にも社会的にも広範囲に影響があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：Constraint satisfaction problems (CSPs) are fundamental combinatorial problems arising in various areas. CSPs belong to the class of NP-hard problems due to their high expressive power. In this study, we gave design and analysis of efficient exact/approximation algorithms. As a result, we obtained improved exact algorithms for the circuit satisfiability problem of bounded depth circuits with weighted symmetric gates and the maximum cut problem parametrized with the crossing numbers. We also obtained approximation algorithms for the minimum linear arrangement problem via higher order eigenvalues.

研究分野：計算理論

キーワード：厳密アルゴリズム 近似アルゴリズム 計算困難 制約充足問題 充足可能性問題 量子計算

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

制約充足問題とは以下のような組合せ問題である。

入力: 変数の集合と、それらの変数の間の制約の集合

出力: 変数への値の割当てで、全ての制約を満たすもの (存在しない場合はその報告)

制約充足問題は、普遍的な組合せ問題として、様々な分野 (理論計算機科学, 数理論理学, 人工知能, オペレーションズリサーチ, 離散数学, 統計物理など) で研究されている。

社会システムや産業活動などに関連して現れる生産計画, 配置計画, 自動設計などを始めとする重要な問題の多くが制約充足問題として簡潔に定式化できることから, 実用的に高速なソルバ開発の熾烈な競争が行われている。本課題の観点であるアルゴリズム理論・計算理論においては, 最も基本的な研究対象のひとつである。

制約充足問題は, その表現能力によって様々な問題のクラスに分類することができる。線形計画法や和積形論理式の充足可能性問題 (いわゆる SAT) はそのようなクラスの例である。問題のクラスは「変数の定義域」「制約の形式」「グラフ理論的な構造」などの組合せで定められる。本課題の動機となるのは, どのクラスに対して効率の良いアルゴリズムが存在するか, という疑問である。

「効率の良いアルゴリズム」には複数の定義が考えられる。線形計画法は入力の記述長の多項式の時間で解けるため, 効率の良いアルゴリズムが存在するクラスと見なされる。一方, 和積形論理式の充足可能性問題は多項式時間で解けないと予想されている (P ≠ NP 予想) が, 自明な総当り探索 (変数が  $n$  個の場合に  $2^n$  通り) よりも指数的に速く (例えば  $1.3^n$  時間で) 解けるという意味で, 効率の良いアルゴリズムが存在するクラスといえる。本課題では後者のような広い意味での効率の良いアルゴリズムも対象とする。

## 2. 研究の目的

本課題の目的は以下の3項目を達成することである。

1. 制約充足問題の種々のクラスに対する効率の良いアルゴリズムの設計と解析  
総当り探索より効率の良いアルゴリズムが

- (a) 未知の場合: 総当り探索の打破
- (b) 既知の場合: さらなる計算時間の改良

2. 制約充足問題の種々のクラスに対する計算困難性の証明

計算理論における標準的な仮定 (P ≠ NP やその精密版である強指数時間仮説など) のもとで計算時間の下界を証明

3. 1 と 2 の応用・帰結

- (a) 制約充足問題に対して
- (b) アルゴリズム理論・計算理論に対して

## 3. 研究の方法

本研究は理論研究であり, 個人での研究や外部の研究者との共同研究により計画を進める。理論解析に必要な知見を得るために, 計算機実験を適宜行う。具体的な研究テーマの候補として, 重要な未解決問題や現状の解析の困難点の調査を済ませており, 各年度においてそれぞれのテーマに取り組む。得られた研究成果は, 国内外で開催される会議, 学術誌, 専門書やウェブページ等を利用して積極的に公表する。

## 4. 研究成果

1. 高階固有値による最小線形配置問題に対する近似保証

重み付き無向グラフ  $G=(V,E)$ ,  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき, 線形配置 (置換)  $\sigma: V \rightarrow \{1,2,\dots,n\}$  で  $w(u,v)|\sigma(u)-\sigma(v)|$  を最小化するものを求める最適化問題は NP 困難である。本研究では  $G$  の正規化ラプラシアン  $L$  の  $r$  番目に小さい固有値  $\lambda_r$  が  $-\lambda_r$  のとき,  $n^{O(r)}$  時間で  $(1-\epsilon)$  近似解を求める乱択アルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは  $G$  が弱い意味でのエキスパンダーであるときに定数近似解を見つけることができる。アルゴリズムの設計と解析は  $r$  ラウンドの Lasserre SDP 緩和に基づく。

Suguru Tamaki, Yuichi Yoshida: Approximation Guarantees for the Minimum Linear Arrangement Problem by Higher Eigenvalues. ACM Trans. Algorithms 14(4): 45:1-45:13 (2018)

2. 重み付対称素子を持つ限定段数回路: 充足可能性, 下界と圧縮

回路の充足可能性問題とは入力として (組合せ) 論理回路が与えられた時に回路が真を出力す

るような変数への真偽値割当が存在するかどうかを判定する問題である。この問題は代表的な NP 困難問題であり入力サイズの多項式の時間で解くことができないと信じられている。さらに入力として与えられる回路に制限がない場合は総当たり探索より高速なアルゴリズムが知られていない。

本研究では二段回路で出力に近い素子が重み付対称関数(排他的論理和や多数決の一般化)を計算し入力に近い素子が論理積を計算するようなものを扱い総当たり探索より高速なアルゴリズムを開発した。上記のような回路の充足可能性問題は最大充足可能性問題を含む一般性のある問題であることに注意されたい。さらに、アルゴリズムを拡張して、定数段数の回路で重み付対称関数を計算する素子の数が限定されているものに対して同様の結果を得た。

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki, Junichi Teruyama: Bounded depth circuits with weighted symmetric gates: Satisfiability, lower bounds and compression. J. Comput. Syst. Sci. 105: 87-103 (2019)

### 3. 細粒量子計算超越性

量子計算が古典計算よりも高速であることの理論的な証拠として、(1) 具体的な問題に対して古典アルゴリズムよりも高速な量子アルゴリズムが存在、(2) 限定された計算モデルでの計算時間のギャップ、(3) 計算複雑性における仮定のもとでの計算時間のギャップ、などがある。本研究では(3)のアプローチをとる。いくつかの非万能量子計算モデルの出力確率分布は、多項式時間階層の崩壊のような計算複雑性理論でありえなさそうな結果が起こらない限り、古典的に効率よくサンプリングされることはない。このようないわゆる量子超越性と呼ばれる結果は、わずかに超多項式である計算時間での古典シミュレーションを除外するものではない。

本研究では「fine-grained 版」の量子超越性について研究し、準指数時間での古典シミュレーション可能性を除外する。我々は2つの非万能量子計算モデル、DQC1 と HC1Q モデルに着目し、fine-grained な計算複雑性におけるある仮説のもとで、これらのモデルの出力確率分布を乗法的誤りについて近似するには、古典計算ではほぼ  $2^{2N}$  時間必要であることを示した。ここで  $N$  は  $q$  ビットの数である。また、万量子計算を行えるモデルも考え、例えばクリフォードゲートと  $T$  ゲートの上での量子計算であれば出力確率分布を乗法的誤りについて近似するには、古典計算では  $2^{(t)}$  時間が必要であることを別の fine-grained な仮説のもとで示した。ここで  $t$  は  $T$  ゲートの個数である。

Tomoyuki Morimae, Suguru Tamaki: Fine-grained quantum computational supremacy. Quantum Inf. Comput. 19(13&14): 1089-1115 (2019)

### 4. 加法誤り細粒量子計算超越性

本研究では「fine-grained 版」の量子超越性について研究し、準指数時間での古典シミュレーション可能性を除外する。我々の先行研究において、fine-grained な計算複雑性におけるある最悪時計算時間に関する仮説のもとで、量子計算機(例え非万能量子計算モデルであっても)の出力確率分布を乗法的誤りについて近似するには、古典計算ではほぼ  $2^N$  時間必要であることを示した。ここで  $N$  は  $q$  ビットの数である。本研究の主な結果は、最悪時計算時間に関する仮説を平均計算時間に関する仮説に置き換えることで、量子計算機の出力確率分布を「加法」的誤りについて近似するには、古典計算で  $2^{(N)}$  時間必要であることを示した。加法的誤りに関する近似は乗法的誤りに関する近似より容易であるが、前者ですら指数的に計算困難であると示せたことになる。

Tomoyuki Morimae, Suguru Tamaki: Additive-error fine-grained quantum supremacy. Quantum 4: 329 (2020)

### 5. ユニタリ作用素識別の量子質問複雑性

ユニタリ作用素識別は量子情報理論における基本的な問題である。ユニタリ作用素  $U$  を実現するブラックボックス  $0$  が与えられたとする。ただし  $U$  はユニタリ作用素  $U_1, U_2$  のいずれかであると約束されている。このとき  $0$  に何回質問することで  $U=U_1$  か  $U=U_2$  を決定できるか知りたい。本研究では質問回数の上下界を  $U_1, U_2$  の「近さ」に関するパラメータで特徴付けた。得られた上下界は定数倍を除いて厳密である。

Akinori Kawachi, Kenichi Kawano, Francois Le Gall, Suguru Tamaki: Quantum Query Complexity of Unitary Operator Discrimination. IEICE Trans. Inf. Syst. 102-D(3): 483-491 (2019)

### 6. 交差数でパラメータ付けられた最大カットに対する改良された固定パラメータアルゴリズム

最大カット問題は一般グラフでは NP 困難であることが知られているが、平面グラフでは多項式時間で解くことができる。本論文では、「ほぼ」平面グラフ上のこの問題に対して、固定パラ

メタ容易アルゴリズムを提案する.  $n$  頂点のグラフと  $k$  個の交差を持つグラフが与えられたとき, 我々のアルゴリズムの計算時間  $2^k \text{poly}(n)$  である. Dahn, Kriege and Mutzel は,  $n$  頂点グラフと  $k$  交差を持つ 1 平面描画が与えられたとき, 計算時間  $3^k \text{poly}(n)$  のアルゴリズムを示した. 我々の結果は実行時間を改善すると同時に 1 平面性の制約を取り除いている.

Yasuaki Kobayashi, Yusuke Kobayashi, Shuichi Miyazaki, Suguru Tamaki: An Improved Fixed-Parameter Algorithm for Max-Cut Parameterized by Crossing Number. IWCA 2019: 327-338

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Morimae Tomoyuki, Tamaki Suguru	4. 巻 4
2. 論文標題 Additive-error fine-grained quantum supremacy	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Quantum	6. 最初と最後の頁 329 ~ 329
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.22331/q-2020-09-24-329	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Tomoyuki Morimae and Suguru Tamaki	4. 巻 19(13&14)
2. 論文標題 Fine-grained quantum computational supremacy	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quantum Information & Computation	6. 最初と最後の頁 1089-1115
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.26421/QIC19.13-14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki and Junichi Teruyama	4. 巻 105
2. 論文標題 Bounded Depth Circuits with Weighted Symmetric Gates: Satisfiability, Lower Bounds and Compression	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Computer and System Sciences	6. 最初と最後の頁 87-103
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcss.2019.04.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 KAWACHI Akinori, KAWANO Kenichi, LE GALL Francois, TAMAKI Suguru	4. 巻 E102.D
2. 論文標題 Quantum Query Complexity of Unitary Operator Discrimination	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEICE Transactions on Information and Systems	6. 最初と最後の頁 483 ~ 491
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1587/transinf.2018FCP0012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tamaki Suguru, Yoshida Yuichi	4. 巻 14
2. 論文標題 Approximation Guarantees for the Minimum Linear Arrangement Problem by Higher Eigenvalues	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 ACM Transactions on Algorithms	6. 最初と最後の頁 1~13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3228342	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Golovnev Alexander, Kulikov Alexander S., Smal Alexander V., Tamaki Suguru	4. 巻 719
2. 論文標題 Gate elimination: Circuit size lower bounds and #SAT upper bounds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 46~63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.tcs.2017.11.008	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 玉置 卓
2. 発表標題 制約充足問題の研究: アルゴリズムと計算複雑性
3. 学会等名 第39回STクラブ (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 玉置 卓
2. 発表標題 SATの解空間連結性判定問題の計算複雑性について
3. 学会等名 組合せ遷移第12回セミナー・勉強会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 早川 龍, 森前 智行, 玉置 卓
2. 発表標題 0V仮定, 3-SUM仮定, APSP仮定に基づく精微な量子超越性
3. 学会等名 第1回量子ソフトウェア研究発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 早川 龍, 森前 智行, 玉置 卓
2. 発表標題 精微な量子超越性の階層性定理
3. 学会等名 日本物理学会 2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yasuaki Kobayashi, Yusuke Kobayashi, Shuichi Miyazaki and Suguru Tamaki
2. 発表標題 An Improved Fixed-Parameter Algorithm for Max-Cut Parameterized by Crossing Number
3. 学会等名 The 30th International Workshop on Combinatorial Algorithms (IWOCA) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森前 智行, 玉置 卓
2. 発表標題 精微な量子計算超越性
3. 学会等名 精微な量子計算超越性 電子情報通信学会コンピュテーション研究会, September (岡山大学, 岡山市)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Suguru Tamaki
2. 発表標題 Stabilizer rank: Sparse representation for classical simulation of quantum circuits
3. 学会等名 代数幾何学的計算理論とその周辺ミニワークショップ, August (東京大学, 東京都目黒区)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 玉置 卓
2. 発表標題 精微な計算複雑性と暗号理論
3. 学会等名 第10回暗号及び情報セキュリティと数学の相關ワークショップ (CRISMATH 2018) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Suguru Tamaki
2. 発表標題 Beating Brute Force for Systems of Polynomial Equations over Finite Fields
3. 学会等名 MPI-INF and MPI-MiS joint workshop on Theoretical Computer Science and Algebraic Geometry (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 徳山 豪, 小林 直樹 (総編集), 玉置 卓 (3.5節)	4. 発行年 2022年
2. 出版社 朝倉書店	5. 総ページ数 800
3. 書名 理論計算機科学事典	

〔産業財産権〕



〔その他〕

Suguru TAMAKI's Website  
<https://sites.google.com/view/sugur/research-jp>  
玉置 卓 (Suguru Tamaki) - マイポータル  
<https://researchmap.jp/7000008755>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------