

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K11174

研究課題名(和文) 固定パラメータ容易な前処理を用いた組み合わせ列挙

研究課題名(英文) Combinatorial generation with fixed-parameter tractable preprocessing

研究代表者

玉木 久夫 (Tamaki, Hisao)

明治大学・研究・知財戦略機構(生田)・研究推進員(客員研究員)

研究者番号：20111354

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本題である列挙アルゴリズムについては、アルゴリズムを定式化し、いくつかの問題に適用できることが確認できた。より大きな成果は、本課題における列挙アルゴリズムの基礎とするパラメータである木幅の計算について画期的な実用アルゴリズムを得たことである。このアルゴリズムは、マイナーに基づく木幅の下界を順次改善して行くという、これまでにない方式によっており、従来法では計算が不可能あるいは極めて困難であったグラフ例に対して木幅を計算することに成功している。この研究は、さらに新しい木幅アルゴリズム、すなわち木幅の上界の計算を、マイナーについての再帰を行うという方法、の考案につながった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

木幅は本研究の基礎となるだけでなく、極めて広範囲の問題に対するアルゴリズムの基礎となるグラフパラメータである。Google Scholar でtreewidthを検索すると、訳1,800件の論文がヒットし、そのほとんどは木幅の応用についての論文である。本研究とその延長となる研究成果から得られた木幅アルゴリズムは、多くのグラフに対して従来法の1000倍以上の高速化を実現しており、その学術的意義は極めて大きい。木幅に基づいたアルゴリズムが知られていながら、木幅の計算が困難であるために実用に結びついていないような問題への波及を考えると社会的に意義もまた大きい。

研究成果の概要(英文)：As for the main topic of enumeration algorithm, we formulated the algorithm and confirmed that it can be applied to several concrete problems. A larger achievement is in finding an innovative practical algorithm for computing treewidth, which is the graph parameter on which our enumeration algorithm is based. This algorithm adopts a new approach of successively improving minor-based lower bounds on the treewidth, and can solve some instances which cannot be solved by, or very hard solve for, conventional treewidth algorithms. This work further lead to an even newer algorithm for treewidth, which computes upper bounds recursively on minors.

研究分野：計算理論

キーワード：algorithm graph parameter treewidth tree-decomposition enumeration preprocessing minor lower bound

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

組み合わせ列挙は、アルゴリズム理論の中でも重要な問題分野であるが、一般のアルゴリズム分野で盛んに研究されている固定パラメータアルゴリズムの観点からは、まだ未開拓の面が大きい。列挙アルゴリズムのパラメータ化には様々な視点があり得るが、そのなかで前処理部分のみをパラメータ化し、列挙の本体はパラメータなしの真の多項式遅延のアルゴリズムという視点はほとんど追及されていなかった。

### 2. 研究の目的

与えられたグラフのなかで、指定された性質を持つ頂点集合を列挙する問題を対象とする。そのような列挙問題は、組み合わせ最適化の文脈で重要性が増している。本研究では、グラフの木分解を用いた列挙アルゴリズムを開発する。開発する列挙アルゴリズムは基本的に前処理と本処理の2段階からなる。前処理においては、指定された性質Pに応じて頂点集合の間に定義される同値関係に基づき、木分解を用いた動的計画法によって同値類を列挙する。この同値関係は、もし頂点集合Uが性質Pを持つならば、Uと同値な頂点集合はすべて性質Pを持つ、という性質を持つ。本処理では、代表元が性質Pを持つような同値類のそれぞれについて、動的計画法におけるその同値類生成の過程を木分解上でたどることにより、同値類の要素をひとつひとつ生成する。

### 3. 研究の方法

与えられたグラフGの中に性質Pを持つ頂点集合が存在するかを判定する問題を考える。性質Pを持つ頂点集合の存在判定のための木分解に基づく動的計画法は、Gの部分グラフHとGのそれ以外の部分を分離する  $X \subseteq V(H)$  の対  $(H, X)$  の族に基づく。各  $(H, X)$  に対して、Hの頂点集合でXに依存してパラメータ化された部分問題を考え、パラメータ値の組ごとに部分解の存在を帰納的に（木分解上でボトムアップに）判定して結果を表に行く。このパラメータ値の組は部分解の同値類を定義しており、その同値類自体が部分解の存在を判定するための帰納法と並行した帰納法によって定義されるならば、同値類の要素列挙を動的計画法の結果として得られる表に基づいて行うことができる。G全体においては、同値類ごとにその要素が性質Pを持つかが決まるので、適格な同値類のそれぞれについて要素を列挙することにより、性質Pを持つ頂点集合すべてを列挙することができる。以上の考察を、次のように境界概形系 (border profile system) として定式化する。概形は、部分問題を規定するパラメータの組に相当し、部分解の同値類を定義するものである。好適な木分解 (nice tree decomposition) のノードのそれぞれに対して、実行可能な概形の集合を対応させるような体系として境界概形系を定義する。この境界概形系の満たすべき公理系を定式化し、この公理系を満たすような境界概形系は自動的に、固定パラメータ容易な前処理を用いる多項式遅延アルゴリズムを与えるようにする。具体的な頂点集合列挙問題に対して、順次境界概形系を定義し、公理系を満たすことを証明した上で実装し、その実際上の性能についても調べる。

### 4. 研究成果

列挙アルゴリズムの基礎として用いる木幅・木分解アルゴリズムの研究に当初の予定以上の努力を傾注し、大きな成果を上げた。以下、論文としてまとめたものについて、概要を述べる。いずれも Hisao Tamaki 単著である。

#### Computing Treewidth via Exact and Heuristic Lists of Minimal Separator

グラフGの木幅  $tw(G)$  を求める実用的に効率の良いアルゴリズムを与える。このアルゴリズムの主要部は、グラフG、正整数k、およびGの極小セパレータの集合  $\Delta$  が与えられたとき、Gの幅k以下の木分解で、 $\Delta$  に属すセパレータのみを使用するものが存在するかどうかを判定する動的計画法アルゴリズムである。 $\Delta$  として、大きさがk以下の極小セパレータすべての集合を取れば、厳密な木幅と計算することができ、 $\Delta$  として発見的に生成された極小セパレータ集合を取れば、木幅の上界を計算することができる。ランダムなグラフに対する実験により、従来法を凌駕する性能が得られることを示した。

#### A heuristic use of dynamic programming to upperbound treewidth

グラフ  $G$  に対して、 $G$  の潜在極大クリークすべてからなる集合を  $\Pi(G)$  で表す。 $\Pi(G)$  の部武運集合  $\Pi$  のそれぞれに対して、 $\text{tw}(G, \Pi)$  により、使用できるバッグを  $\Pi$  の要素に限定したときの木幅を表す。Bouchitte と Todinca は、 $\text{tw}(G, \Pi(G))$  が  $G$  の木幅  $\text{tw}(G)$  に等しいことを示し、 $\text{tw}(G, \Pi(G))$  を計算する動的計画法アルゴリズムを与えた。彼らのアルゴリズムは、 $\Pi(G)$  の任意の部分集合  $\Pi$  に対して  $\text{tw}(G, \Pi)$  を高速に計算するために用いることができる。これにより、個々の木分解ではなく、潜在極大クリークの集合を解として扱う局所探索アルゴリズムへの道が開かれた。この論文では、実際いそのような局所探索アルゴリズムを実装し、従来法を凌駕する性能が得られることを実験により示した。

#### A heuristic for listing almost-clique minimal separators of a graph

グラフのほぼクリークセパレータは、木幅計算における Bodlaender と Koster の前処理アルゴリズムにおいて大きな役割を果たす。彼らは、与えられたグラフのすべてのほぼクリークセパレータを列挙する多項式時間アルゴリズムを与えたが、実用上の実行速度は十分ではない。我々は、グラフ  $G$  のほぼクリークの列挙において、 $G$  の極小三角化をひとつ固定して、その極小セパレータのなかからほぼクリークであるものを探せば前処理の目的上は十分であり、極めて高速な処理が可能であることを示した。

#### Heuristic computation of exact treewidth

グラフの木幅を計算するために、発見的な上界アルゴリズムと下界アルゴリズムを合わせて使用する。緩い上界と緩い下界から出発して両者が一致するまで前者は下降し、後者は上昇する。上界アルゴリズムは、潜在極小クリークを用いる局所探索法に解のマーージを取り入れることで高性能化を図っている。下界アルゴリズムは、現在の下界を与えるマイナーのアンコントラクションでより大きい下界を与えるものを探す。その探索において、安全なセパレータの個数などの発見的な指標を用い、また辺を追加して問題を緩和して解いたのちに、もとの問題の解への変換を試みるなどのテクニックを用いている。木幅計算をテーマとした PACE 2017 アルゴリズム実装コンテストのボーナス課題で、コンテストの受賞プログラムには解くことが困難のものも多く、この新しいアプローチにより解けることを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Hisao Tamaki	4. 巻 37(4)
2. 論文標題 Positive-instance driven dynamic programming for treewidth	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Optimization	6. 最初と最後の頁 1283--1311
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10878-018-0353-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Hisao Tamaki	4. 巻 11544
2. 論文標題 Computing Treewidth via Exact and Heuristic Lists of Minimal Separators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 219-236
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-34029-2#_15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hisao Tamaki	4. 巻 abs/1909.07647
2. 論文標題 A heuristic use of dynamic programming to upperbound treewidth	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 CoRR	6. 最初と最後の頁 1--14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Hisao Tamaki	4. 巻 12160
2. 論文標題 Experimental Analysis of Treewidth	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 214--221
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Hisao Tamaki	4. 巻 abs/2108.07551
2. 論文標題 A heuristic for listing almost-clique minimal separators of a graph	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 CoRR	6. 最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hisao Tamaki	4. 巻 1
2. 論文標題 Heuristic Computation of Exact Treewidth	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 20th International Symposium on Experimental Algorithms	6. 最初と最後の頁 17:1-17:16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.SEA.2022.17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Hisao Tamaki
2. 発表標題 Listing minimal separators for treewidth computation
3. 学会等名 NWO-JSPS joint seminar: "Computations on Networks with a Tree-Structure: From Theory to Practice (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisao Tamaki
2. 発表標題 Computing treewidth via exact and heuristic lists of minimal separators
3. 学会等名 Shonan Seminar 144: Parameterized Graph Algorithms & Data Reduction: Theory Meets Practice (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisao Tamaki
2. 発表標題 Computing treewidth via exact and heuristic lists of minimal separators
3. 学会等名 Special Event on Analysis of Experimental Algorithms (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------