

令和 3 年 6 月 10 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K11178

研究課題名(和文)凸最適化問題に対する加速(劣)勾配法の本質的なメカニズムの究明に向けて

研究課題名(英文) Toward investigating the intrinsic mechanism of accelerated (sub)gradient methods for convex optimization problems

研究代表者

福田 光浩 (Fukuda, Mitsuhiro)

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：80334548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：主な成果を2つに纏めることができる。

まず、微分不可な関数を含む凸関数を加速(劣)勾配法により最小化する研究が挙げられる。この手法を実装するのに、より実践的な勾配写像のノルムを停止条件とした時、凸関数がある解析性に関する不等式を満たす時、生成される点列の収束を保証する新しい手法が提案できた。その結果、提案手法が準最適な手法であることも判明した。

ほう一つの成果は、非凸関数の最小化に関して、Bregman距離と近接法を融合させた新たな手法の提案である。特に、凸関数の差として表せるDC関数に対する解析では、提案手法が生成する点列がある仮定の下で停留点に収束することが示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

混沌としている凸最適化問題に対する加速(劣)勾配法の中でも現段階において勾配写像のノルムによる停止条件を考慮した場合の整理がある程度出来たと思っている。特に、この関数がパラメータに依存するHoelderian Error Boundを満たした時にそれらのパラメータを推定しながら更新ができる新たな手法の収束に関する解析が行えた。

また2つの凸関数の差として表せる非凸関数の最小化をBregman距離を用いた近接法を利用することにより既存の手法より緩い条件で収束を保証するものが提案できた。特に、正規分布に従う疑似乱数によって生成された位相回復に対して既存手法より格段に効率が良いことが確認できた。

研究成果の概要(英文)： The main results can be summarized in two.

First, we considered the minimization of convex functions including non-differentiable functions by the accelerated (sub)gradient methods. We proposed new methods that guarantee the convergence of the generated sequences when a more practical gradient mapping norm is used for the stopping criterion and also when the convex function satisfies a certain analytic inequality. As a result, we proved that the proposed method is a nearly optimal method.

The other result is the proposal of a new method that combines the Bregman distance and the proximity method for a minimization of non-convex functions. In particular, in the analysis of the DC function, which can be expressed as the difference of two convex functions, it was shown that the sequences generated by the proposed method converge to a stationary point under certain assumptions.

研究分野：数理最適化

キーワード：加速(劣)勾配法 凸最適化問題 一次法 停止条件 非凸最適化問題 近接法 Bregman距離 DC最適化問題

1. 研究開始当初の背景

現代の IT 依存社会において、爆発的な情報量进行处理し、その中から有益な情報だけを抽出して活用する手段として機械学習や AI を用いることをしばしば耳にする。そのような風潮のなか、数理最適化と同化し、お互いに刺激しあう共通のテーマとして、凸最適化問題やその解法である一次法といったものがある。

数ある一次法の中でも、1983年に Nesterov によって提案された加速(劣)勾配法から派生した手法らが今なお脚光を浴びている。それらの手法は大規模な凸最適化問題を解くのに適しており、最小値を求めたい凸関数の関数値、勾配もしくは劣勾配のみを計算に用いるアルゴリズムである。理論的にそれらの効率性が保証されている一方、従来の手法と比較して本質的に何故速いのかという洞察がハッキリしていない。それは、現在でも専門家の間で議論になるテーマである。

これらの手法の各反復における計算量は一定であるため、典型的な加速(劣)勾配法に関する研究は停止条件を満たすために必要となる反復回数の上限を議論する。よって、予め設定した指標(停止条件)によって異なるのは当然である。特に、未知の最適値とある反復点での関数値の差、および最適値に依存しない勾配写像のノルムを用いるものが主流である。これらの指標を用いた場合最大の反復回数を必要とする関数を特定することにより、手法の本質が少し理解できる可能性もあり、そのような主旨の研究も存在する。

一方、機械学習寄りの一次法や加速(劣)勾配法の研究の多くは、特定の問題に焦点を当て、個別に細かくチューニングをして手法を組み上げていく傾向がある。

2. 研究の目的

本研究は条件が整った凸最適化問題に対して加速(劣)勾配法が何故速いのかという疑問を解明すべく始められたものであるが、残念ながらその決定的な解答はまだ得られていない。進行形の研究と言える。

関連するテーマとして、勾配写像のノルムを停止条件と設定し、最小値を求める凸関数がある解析性に関する不等式を満たす時、提案手法が必要とする理論的な最大反復回数を求めることが挙げられる。勾配写像のノルムを用いることは実装に合致した指標である。

サブテーマとして、加速(劣)勾配法やより一般的な一次法に関連する近接法や交互方向乗数法を用いた実用的な問題の解法も研究の対象とした。

3. 研究の方法

対象としている加速(劣)勾配法に関連した手法を比較し、その細部に渡る違いを確認することから始まった。特に近年、関連する手法が多々提案されている。それらは、最小値を求める凸関数がある関数クラスに属し、そのクラスを決定するパラメータを一部固定し、残りのものを推定する手法である。また、それらの手法によって生成される点列が停止条件を満たして終了するために必要な反復回数の上限は複雑な計算式から求められる。

関連するサブテーマとして、Bregman 距離や近接法といった一次法を用いて、特定の問題を解く研究にも取り組んだ。それらは、凸関数の差として表される DC 最適化問題(Difference of Convex の略)と呼ばれ、昔から活発に研究されている対象である。新たな解法を提案し、この手法によって生成される点列が理論的にある条件の下で停留点に収束することを証明した。近年、DC 最適化問題は画像処理や位相回復において活用されていることから実用性を確認するため、それらの問題に対して提案手法を施した。

4. 研究成果

主な成果として2つ挙げることができる。

まず、微分不可な関数を含む凸関数を加速(劣)勾配法により最小値を求める研究が挙げられる。この手法を実装するのに、より実践的な勾配写像のノルムを停止条件とした時に加速(劣)勾配法が必要とする反復回数の上限が得られた。特に、最小値を求める凸関数がある解析性に関する不等式を満たす時、それらを満たすパラメータが未知であっても加速(劣)勾配法の収束を保証する新しい手法となった。さらに、この手法は初期化を繰り返し行うことにより、勾配写像のノルムを用いた停止条件を満たすために、最終的な反復回数の上限が準最適であることを示すことができた。準最適な反復回数とは対象とする関数クラスの任意の関数において、既知な最も効率が良い手法と比較して計算量が対数オーダー程度多いことを意味している。準最適ではなく、最適な手法が提案できるかは未解決な問題であり今後の課題となっている。

もう一つの成果として、非凸関数の最小化に関して、Bregman 距離と近接法を融合させた新しい手法の提案がある。特に、DC 関数に対して適用を行った。提案手法が生成する点列の部分点列がある仮定の下で停留点に収束することを示し、さらに仮定を増やすことで、点列全体が停留点に収束することも示せた。特殊なケースにおいて、その収束レートを求めることにも成功した。また、画像処理などでも登場する位相回復の問題を実装実験の対象とした。その結果、位相回復

の問題において、この手法が大変有効であることが判明した。ガウシアンモデルに従って生成した乱数による問題設定に対しては、既存の手法よりも明らかに高速に収束することが確認できた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masaru Ito and Mitsuhiro Fukuda	4. 巻 188
2. 論文標題 Nearly optimal first-order methods for convex optimization under gradient norm measure: An adaptive regularization approach	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Optimization Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 770 ~ 804
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10957-020-01806-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Masaru Ito and Mitsuhiro Fukuda
2. 発表標題 Nearly optimal first-order method under Holderian error bound: An adaptive proximal point approach
3. 学会等名 The Sixth International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaru Ito and Mitsuhiro Fukuda
2. 発表標題 An adaptive first order method for weakly smooth and uniformly convex problems
3. 学会等名 The 23rd International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤勝, 福田光浩
2. 発表標題 勾配のノルムを停止条件とする準最適な一次法
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2019 年春季研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋翔大, 福田光浩, 田中未来
2. 発表標題 DC最適化問題に対するBregman距離を用いた近似アルゴリズム
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年春季研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高橋翔大, 福田光浩, 田中未来
2. 発表標題 DC最適化問題に対するBregman距離を用いた近似アルゴリズムと複素最適化問題への拡張
3. 学会等名 研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	伊藤 勝 (Ito Masaru) (90778375)	日本大学・理工学部・助手 (32665)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------