

令和 3 年 6 月 28 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K11181

研究課題名(和文) 戦略的待ち行列のための構造化マルコフ連鎖の研究

研究課題名(英文) Study of structured Markov chains for strategic queues

研究代表者

増山 博之 (Masuyama, Hiroyuki)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：60378833

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、戦略的待ち行列を含む状態依存型待ち行列を解析するためのブロック構造化マルコフ連鎖とランダムウォーク型マルコフ連鎖を対象とする。主な成果としては、まず、可算状態マルコフ連鎖の定常分布に対する一般的な切断近似の上界を導出した。それから、M/G/1型マルコフ連鎖の定常分布に対する最終列ブロック増大切断近似とレベル増分切断近似の収束公式を示した。さらに、Upper Block-Hessenberg マルコフ連鎖の定常分布を計算するための反復法を確立したほか、平均待ち時間を最小化しようとするポアソン客母集団をもつ離散時間単一サーバ待ち行列ゲームの均衡到着分布の解析を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

戦略的待ち行列は、不特定多数の利用者を収容するサービスシステムでの競合状況を模した数理モデルであり、サービス利用者・提供者の最適な意思決定について分析するために用いられる。戦略的待ち行列を含む状態依存型待ち行列の解析は、ブロック構造化マルコフ連鎖やランダムウォーク型マルコフ連鎖の解析に帰着される。これらのマルコフ連鎖に関する本研究の成果は、不確実性下のサービスシステムにおけるサービス利用者・提供者の最適な意思決定法の確立に貢献するものである。

研究成果の概要(英文)：This study is concerned with block-structured Markov chains and random-walk-type ones for analyzing state-dependent queues including strategic ones. The main results are as follows. First, we derived an upper bound for the general truncation approximation to the stationary distribution in countable-state Markov chains. We then presented some convergence formulas for the last-column-block-augmented truncation approximation and level-increment truncation approximation to the stationary distribution in M/G/1-type Markov chains. We also established an iterative method for computing the stationary distribution in upper block-Hessenberg Markov chains. Besides, we analyzed the equilibrium arrival distribution in a discrete-time single-server queueing game with a Poisson population of customers trying to minimizing their mean waiting times.

研究分野：応用確率論

キーワード：戦略的待ち行列 待ち行列ゲーム ブロック構造化マルコフ連鎖 ランダムウォーク型マルコフ連鎖 切断近似 エルゴード解析

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

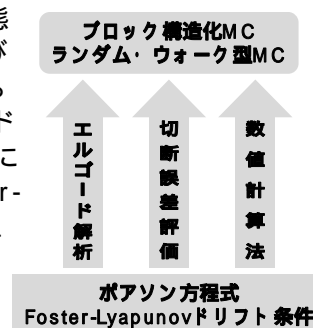
広い意味での戦略的待ち行列の歴史は古い。例えば、休暇や優先権のある待ち行列、また、後着順、プロセッサ・シェアリングなどのサービス規律を採る待ち行列は、サーバ(サービス提供者)の「戦略」を取り込んだモデルである。これらのモデルは長く待ち行列研究の中心にあり、多くの理論的成果が報告されている。一方、待ち行列の選択、並び直し、途中退去、再試行などが発生する待ち行列は、客(サービス利用者)の戦略を取り込んだモデルであり、到着過程あるいはサービス過程が待ち人数やサーバ占有数などの「システムの状態」に依存する。こうした「状態依存型待ち行列」は、隠れマルコフ連鎖法によって、「ブロック構造化マルコフ連鎖」や「ランダムウォーク(RW)型マルコフ連鎖」に帰着される。しかし、これらのマルコフ連鎖の解析は容易ではなく、応用に資する理論的成果はまだ十分に蓄積されていない。

### 2. 研究の目的

本研究は、主として、戦略的待ち行列を含む状態依存型待ち行列の数理解析に資することを目的とし、ブロック構造化およびRW型マルコフ連鎖のエルゴード解析、切断誤差評価、数値計算法の開発などを行う。特に、「Upper Block-Hessenberg (UBH)マルコフ連鎖」と「GI/G/1型マルコフ連鎖」に着目する。これらのマルコフ連鎖は、「ブロック構造化」および「RW型」の両クラスにまたがる表現力の高いマルコフ連鎖である。例えば、UBHマルコフ連鎖は、多次元非負格子上的ランダムウォークに加え、状態依存型待ち行列の解析道具である「レベル依存準出生死滅過程」「M/G/1型マルコフ連鎖」などを特別な場合として含む。一方、GI/G/1型マルコフ連鎖は、M/G/1型マルコフ連鎖の拡張であり、UBHマルコフ連鎖とは本質的に推移構造が異なる「GI/M/1型マルコフ連鎖」も特別な場合として含む。したがって、UBHマルコフ連鎖やGI/G/1型マルコフ連鎖に対するエルゴード解析、切断誤差評価、数値計算法に関する研究が進展すれば、これまで未解決だった待ち行列が“解ける”だけでなく、従来の研究成果を統一的な枠組みで捉え直すことができ、その結果、新たな理論・応用が生まれる可能性もある。

### 3. 研究の方法

近年、ブロック構造化およびRW型マルコフ連鎖については、状態推移を支配する増分分布の性質と、「切断による近似誤差」および「エルゴード収束率(定常分布への収束率)」との関係が次第に明らかになってきた。本研究では、そうした切断誤差解析とエルゴード解析の底流にある関係性に着目して課題の解決を図った。具体的には、両解析の主たる数学的道具である「ポアソン方程式」と「Foster-Lyapunovドリフト条件」を用いて、UBHマルコフ連鎖やGI/G/1型マルコフ連鎖を中心に、できる限り一般的なマルコフ連鎖のエルゴード解析、切断誤差評価、数値計算法の開発などを行った。



### 4. 研究成果

#### (1) 可算状態マルコフ連鎖の一般的な切断近似に対する誤差上界の導出

マルコフ連鎖の切断誤差評価と関連の深い摂動解析は、主として、ポアソン方程式の解である「偏差行列」を用いて行われてきた。しかし、偏差行列の各成分の確率的解釈は容易ではなく、解析にあたっての見通しは良くない。そこで、ポアソン方程式についての確率的解釈可能な解に着目し、それに対する計算可能な上界を導いた。さらに、その確率的解釈可能な解を用いて、近似定常分布と元の定常分布との差分公式を示した。これらの成果を組み合わせることで、可算状態マルコフ連鎖に対する一般的な切断近似について、先行研究よりも簡便で正確な誤差上界式を導いた。

#### (2) Upper Block-Hessenberg (UBH)マルコフ連鎖に関する定常分布計算法の開発

UBHマルコフ連鎖の定常分布計算に関する先行研究は、本質的に、近似定常分布の計算アルゴリズムの提案を目的としている。具体的には、あるレベル以上の推移構造をBlock Toeplitz化して実質的にM/G/1型マルコフ連鎖に帰着させたり、上限レベルを定めた条件付き定常分布を計算対象としたりしている。一方、本課題では、定常分布に収束する反復法の構築を目的とする。この目的に向けて、研究代表者らの研究成果である「増大切断近似による定常分布の誤差上界(Liu, Li, and Masuyama, OR Letters, 2018)」を用いて、定常分布に収束する近似分布列を最適解にもつ一連の線形分数計画問題を定式化した。その結果、UBHマルコフ連鎖の定常分布が反復法で計算できることが示された。

### (3) M/G/1 型マルコフ連鎖の最終列ブロック増大(LCBA)切断近似の漸近解析

最終列ブロック増大(LCBA)切断近似は、定常分布を計算するための近似手法の一つである。そして、M/G/1 型マルコフ連鎖に LCBA 切断近似を適用すると、「有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖」となる。有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖は、有限容量セミ・マルコフ型待ち行列の代表的な解析道具である。したがって、M/G/1 型マルコフ連鎖を対象とした LCBA 切断近似の漸近解析は、有限容量セミ・マルコフ型待ち行列の性能解析にも貢献する。本課題では、LCBA 切断近似による M/G/1 型マルコフ連鎖の近似定常分布の裾確率が、元の定常分布の裾確率と比べて一様に小さくなることを証明した。この結果と定常分布に対する漸近解析結果を活用し、近似定常分布の劣幾何収束公式を導いた。なお、得られた劣幾何収束公式から、レベル増分の積分裾分布が劣指数的な場合には、近似定常分布の誤差減衰速度が、元の定常分布の裾減衰速度と同等であることがわかった。

### (4) M/G/1 型マルコフ連鎖の増分切断近似の漸近解析

通常、M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布は「Ramswami の再帰式」を基にして数値計算される。しかし、その再帰式の実装には、増分切断近似、すなわち、1 推移あたりの増分分布を切断する必要がある。研究代表者が知る限り、この増分切断近似の誤差評価に関する先行研究はない。本課題では、上記課題(3)の LCBA 切断近似に関する研究成果を下地として、増分切断による近似定常分布の劣幾何収束公式を示した。その結果、レベル増分の積分裾分布が long-tailed である場合には、増分切断近似と LCBA 切断近似の誤差減衰速度が同等であることがわかった。

### (5) GI/G/1 型マルコフ連鎖のエルゴード解析

GI/G/1 型マルコフ連鎖は RW 型マルコフ連鎖の一つであり、代表的なブロック構造化マルコフ連鎖でもある。ちなみに、課題(4)で対象とした M/G/1 型マルコフ連鎖は、GI/G/1 型マルコフ連鎖の特別な場合である。GI/G/1 型マルコフ連鎖の定常裾減衰率(定常分布の裾減衰率)については、研究代表者らの研究成果を含め、先行研究の蓄積が十分にある。しかし、エルゴード収束率(定常分布への収束率)についての既知の結果は少ない。本課題では、劣幾何エルゴード的な GI/G/1 型マルコフ連鎖を対象に、「レベル増分分布の裾減衰率」「定常裾減衰率」「エルゴード収束率」の三者間の関係を調べた。まだ解決すべき問題が一部残っているものの、定常分布への収束が極端に遅くなる場合についての理解が深まった。

### (6) 離散時間単一サーバ・ポアソン待ち行列ゲームの解析

本課題は、客の戦略を強く意識した待ち行列ゲーム(戦略的待ち行列)を対象とする。ほとんどの先行研究では、客のサービス時間分布が退化分布(固定長サービス)、あるいは、指数分布に限定されている。そこで、本課題では、サービス時間分布が均衡到着分布に与える影響を調べるため、一般サービス時間分布をもつ離散時間単一サーバ・ポアソン待ち行列ゲームを導入した。そして、系内仕事量過程が Upper Hessenberg 型の推移則に従うことを利用して、平均待ち時間を最小化しようとする客集団の均衡到着分布の数値計算法を提示し、数値実験を行った。その結果、サービス時間分布の分散が大きくなるにつれ、受付開始直後の到着割合が増加することがわかった。さらに、より現実の状況に近いと考えられる Agent-based model を構築し、解析的に得られた均衡到着分布の妥当性を確認した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yutaka Sakuma, Hiroyuki Masuyama, and Emiko Fukuda	4. 巻 283
2. 論文標題 A discrete-time single-server Poisson queueing game: Equilibria simulated by an agent-based model	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Operational Research	6. 最初と最後の頁 253-264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ejor.2019.11.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuanyuan Liu, Wendi Li, and Hiroyuki Masuyama	4. 巻 46
2. 論文標題 Error bounds for augmented truncation approximations of continuous-time Markov chains	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Operations Research Letters	6. 最初と最後の頁 409-413
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.orl.2018.05.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroyuki Masuyama	4. 巻 92
2. 論文標題 A sequential update algorithm for computing the stationary distribution vector in upper block-Hessenberg Markov chains	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Queueing Systems	6. 最初と最後の頁 173-200
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11134-019-09599-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 桑野 寛理, 増山 博之
2. 発表標題 ポアソン客母集団に対する受付時間制約と時間依存性コストをもつ待ち行列ゲームの均衡到着分布
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 関西支部 SSOR2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大内 克久, 増山 博之
2. 発表標題 M/G/1型マルコフ連鎖に対するレベル増分切断近似の収束性
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 関西支部 SSOR2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 矢島 萌子, フンドック トゥアン, 増山 博之
2. 発表標題 集団到着型無限サーバ待ち行列の安定性
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 関西支部 SSOR2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大内 克久, 増山 博之
2. 発表標題 M/G/1型マルコフ連鎖に対するレベル増分切断近似の収束性
3. 学会等名 2018年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大内 克久, 増山 博之
2. 発表標題 M/G/1型マルコフ連鎖に対するレベル増分切断近似の漸近公式
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2019年秋季研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川口和樹, 増山 博之
2. 発表標題 GI/G/1型マルコフ連鎖の劣幾何エルゴード条件
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2019年秋季研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 増山 博之
2. 発表標題 上ブロック・ヘッセンベルグ型マルコフ連鎖の定常分布に対する行列無限積形式解
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会(第285回)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐久間 大, 増山 博之, 福田 恵美子
2. 発表標題 待ち行列ゲームの均衡解の再現性を検証する単純なエージェント・ベース・モデル
3. 学会等名 2019年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kazuki Kawaguchi and Hiroyuki Masuyama
2. 発表標題 Subgeometric ergodicity of GI/G/1-type Markov chains: Triangular relationship between ergodic convergence rate, stationary distribution, and level-increment distribution
3. 学会等名 2019年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Katsuhisa Ouchi and Hiroyuki Masuyama
2. 発表標題 Subgeometric convergence of the level-increment truncation of M/G/1-type Markov chains
3. 学会等名 2019年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Katsuhisa Ouchi and Hiroyuki Masuyama
2. 発表標題 A geometric convergence formula for the level-increment truncation approximation of M/G/1-type Markov chains
3. 学会等名 2020年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

List of Publications (Refereed) <a href="https://www.comp.tmu.ac.jp/masuyama/publications.html">https://www.comp.tmu.ac.jp/masuyama/publications.html</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Central South University			