

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 16 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K11184

研究課題名(和文) 確率的不動点最適化アルゴリズムとアンサンブル学習への応用

研究課題名(英文) Stochastic Fixed Point Optimization Algorithm and Its Application to Ensemble Learning

研究代表者

飯塚 秀明 (Iiduka, Hideaki)

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：50532280

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：疎性と多様性を考慮したアンサンブル学習問題を考察し、その問題が不動点集合上の確率的最適化問題として定式化できることを示した。その問題に対して、確率的不動点最適化アルゴリズムを提案し、定数学習率、減少学習率、直線探索による学習率に対する収束解析を与えた。定数学習率においては、十分小さな学習率を有するアルゴリズムが問題の解を近似することができる。減少学習率においては、問題の解に収束するための条件を与えた。直線探索による学習率においては、アルゴリズムが問題の解に収束することを示した。提案及び既存アンサンブル学習法との数値比較により、提案手法の高分類精度を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

疎性や多様性を考慮したアンサンブル学習においては、大規模かつ複雑な確率的最適化問題を解く必要がある。しなしながら、従来のアンサンブル学習法は、その問題の大幅な緩和やその問題の解へ収束する保証がない学習アルゴリズムに基づいており、本来達成すべきアンサンブル学習法の性能を満たしていない。本研究での提案手法は、その問題に直接適用できる不動点最適化アルゴリズムに基づくアンサンブル学習法であり、世界的に例のない新解法である。本研究の成果は、従来アンサンブル学習法の適用範囲に関する改善に多大な貢献ができることから応用数学的観点のみならず、工学的観点から見ても意義があると言える。

研究成果の概要(英文)：We consider a classifier ensemble problem with sparsity and diversity learning and show that the problem can be formulated as a stochastic optimization problem with fixed point constraint. For such a problem, we propose an algorithm referred to as the stochastic fixed point optimization algorithm and perform a convergence analysis for three types of learning rate: constant learning rate, decreasing learning rate, and a learning rate computed by line searches. In the case of a constant learning rate, the results indicate that a sufficiently small constant learning rate allows a solution to the problem to be approximated. In the case of a decreasing learning rate, conditions are shown under which the algorithm converges to a solution. For the third case, a variation of the proposed algorithm also achieves convergence to a solution. The high classification accuracies of the proposed algorithms are demonstrated through numerical comparisons with the conventional algorithm.

研究分野：最適化

キーワード：確率的最適化 不動点 アンサンブル学習 最適化アルゴリズム

### 1. 研究開始当初の背景

アンサンブル学習法とは、複数の学習器を訓練し、それらを組み合わせて将来を予測することができる最先端の学習法である。各学習器は、従来学習アルゴリズムを訓練用データから得られる最適化問題に適用することで生成される。しかしながら、ノイズに対する頑強なアンサンブル構築のための疎性 (sparsity) と安定した学習器のアンサンブル構築に必要とされる多様性 (diversity) を考慮したアンサンブル学習においては、従来学習アルゴリズムでは適用できない大規模かつ複雑な確率的最適化問題を解決する必要がある。

疎性や多様性を考慮したアンサンブル学習法は、様々な数理的アプローチ (例えば、半正定値計画、多重目的ニューラルネットワーク、線形計画、二次計画等) により考案されてきたが、従来のアンサンブル学習法は、上記の確率的最適化問題の大幅な緩和や確率的最適化問題の解への収束が保証されない学習アルゴリズムに基づいており、本来達成すべきアンサンブル学習法の性能を満たしていない。

以上のことから、本研究課題の核心をなす学術的問いは以下の通りである。

- (1) 大規模かつ複雑な確率的最適化問題を緩和せずに考察することが可能であるか。
- (2) 大規模かつ複雑な確率的最適化問題の解への収束が保証される学習アルゴリズムの開発が可能であるか。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、上記の確率的最適化問題を解くことが可能な新学習アルゴリズム(上記(1)、(2)を解決できる新学習アルゴリズム)に基づく新アンサンブル学習法を開発することである。そして、従来のアンサンブル学習では成し遂げられなかった疎性と多様性を考慮したアンサンブル学習法を確立し、従来のアンサンブル学習法と比べて分類精度が優れていることを実証することである。

### 3. 研究の方法

本研究の方法は、以下の通りである。

- (1) 上記の確率的最適化問題を解くためのアルゴリズム「確率的不動点最適化アルゴリズム」を提案する。このアルゴリズムは、研究代表者が提唱してきた不動点最適化アルゴリズム(若手研究(B)[課題番号:21760062, 23760077]、基盤研究(C)[課題番号:15K04763])を発展させたアルゴリズムであり、確率的最適化問題にも適用可能である。また、そのアルゴリズムが、上記の確率的最適化問題の解へ収束することを数学的に証明する。加えて、アルゴリズムの収束率解析も行う。
- (2) 機械学習に関する公開データを用いて提案及び従来アンサンブル学習法の性能を、分類精度、実行時間の評価により比較をする。提案アンサンブル学習法が従来アンサンブル学習法と比べて性能が向上していることをシミュレーション評価実験から実証する。

### 4. 研究成果

#### 【平成30年度の研究成果】

初年度では、大規模かつ複雑な確率的最適化問題の制約集合を、非拡大写像と呼ばれる非線形写像の不動点集合として定式化した。よって、主問題の確率的最適化問題は非拡大写像の不動点集合上の確率的最適化問題に帰着される。その問題を解決するには、まず初めに、制約集合の点に収束するようなアルゴリズムを構築する必要があるが、不動点(制約集合の点)を見つけるための手法として、不動点近似法が知られている。次に、目的関数を最小化するために、確率的最適化を行うための手法を利用する。特に、初年度では、最も単純であるが最適化においては強力な手法である確率的勾配降下法を利用した。以上のことから、初年度では、不動点近似法と確率的勾配降下法を合わせた「確率的不動点最適化アルゴリズム」を提案している。

学習アルゴリズムの高速化には、学習率(最適化の分野ではステップ幅、ステップサイズと呼ばれる)というパラメータを前もって適切に設定する必要がある。ここでは、先行研究でも利用されている「定数学習率」、「減少学習率」、「直線探索による学習率」の3つの学習率に対する「確率的不動点最適化アルゴリズム」の収束解析を提案している。結果は以下の通りである。

- (1) 「定数学習率」を有する確率的不動点最適化アルゴリズムが不動点に収束し、かつ、目的関数を最小化するには、小さな定数学習率を利用することが望ましい、という結果を得ることができた。「減少学習率」や「直線探索による学習率」を有する確率的不動点最適化アルゴリズムが主問題の解に収束することを証明した。
- (2) 確率的不動点最適化アルゴリズムに基づくアンサンブル学習法と既存のアンサンブル学習法を数値比較した結果、「定数学習率」と「直線探索による学習率」を有する確率的不動点最適化アルゴリズムに基づくアンサンブル学習法が高分類精度を達成した。

上記(2)では、提案アンサンブル学習法の高分類精度を主張しているが、「直線探索による学習率」を有する確率的不動点最適化アルゴリズムの実行時間は他の手法と比べて長かった。その

理由は、各反復で直線探索を行ったのちに学習率を設定するため、各反復の処理が他の手法の処理と比べて時間を有しているからであった。そのため、初年度で得られたアルゴリズムの高速化が今後の課題となった。なお、初年度で得られた結果は、IEEE のトップジャーナルである IEEE Transactions on Cybernetics (IF: 11.079) に採択されている。

一方で、前研究課題「大規模かつ複雑なネットワーク上の資源を高速に割り当てるための分散型不動点劣勾配法」(基盤研究(C): 15K04763)と本研究課題は、不動点最適化という枠組みでは共通する研究課題であるため、ネットワーク資源割り当てに関する研究も行った。結果として、論文は、IEEE Transactions on Control of Network Systems (IF: 3.467) に採択されている。

#### 【平成31年度/令和1年度と令和2年度の研究成果】

前年度で得られた確率的不動点最適化アルゴリズムの加速法について研究を行った。平成30年度で提案したアルゴリズムは確率的勾配降下法に基づくアルゴリズムであった。機械学習の分野においては、確率的勾配降下法よりも高速に解を求めることができる手法が提案されている。例えば、Adaptive Gradient (AdaGrad), Root Mean Square Propagation (RMSProp), Adaptive moment estimation (Adam), Adaptive Mean Square Gradient (AMSGrad) などの適応学習率最適化手法が深層ニューラルネットワークを高速に訓練するために利用されている。この事実に基づき、不動点近似法と適応学習率最適化手法を合わせたアルゴリズム「不動点適応学習率最適化アルゴリズム」を提案し、その収束解析と収束率解析について提案をすることができた。結果は以下の通りである。

- (1) 「定数学習率」を有する不動点適応学習率最適化アルゴリズムが不動点に収束し、かつ、目的関数を最小化するには、小さな定数学習率を利用することが望ましい、という結果を得ることができた。「減少学習率」や「直線探索による学習率」を有する不動点適応学習率最適化アルゴリズムが主問題の解に収束することを証明した。また、「減少学習率」や「直線探索による学習率」を有する不動点適応学習率最適化アルゴリズムの収束率解析を与えた。
- (2) 確率的勾配降下法に基づいたアンサンブル学習法(平成30年度の成果)と適応学習率最適化手法に基づいたアンサンブル学習法とを数値比較した結果、適応学習率最適化手法に基づいたアンサンブル学習法が高速で、かつ、最も高い分類精度を達成することができた。

この研究成果は、Springer Nature が発行するジャーナル Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering (IF: 2.503) に採択されている(2021年4月に掲載)。

この結果を得る過程で、不動点最適化アルゴリズムに関する研究成果(単著1編、共著6編)、機械学習アルゴリズムに関する研究成果(共著3編)、本年度から開始する研究課題「リーマン不動点最適化アルゴリズムと機械学習への応用」(基盤研究(C): 21K11773)の準備のための研究成果(共著1編)について纏めることができている(詳細については、5. 主な発表論文等をご参照下さい)。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Hideaki Iiduka	4. 巻 50
2. 論文標題 Stochastic Fixed Point Optimization Algorithm for Classifier Ensemble	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Cybernetics	6. 最初と最後の頁 4370 4380
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1109/TCYB.2019.2921369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Haruhi Oishi, Yu Kobayashi, Hideaki Iiduka	4. 巻 5
2. 論文標題 Incremental Proximal Method for Nonsmooth Convex Optimization With Fixed Point Constraints of Quasi-nonexpansive Mappings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 477 493
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Hishinuma, Hideaki Iiduka	4. 巻 20
2. 論文標題 Convergence Analysis of Incremental and Parallel Line Search Subgradient Methods in Hilbert Space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 1937 1947
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Hishinuma, Hideaki Iiduka	4. 巻 6
2. 論文標題 Incremental and Parallel Machine Learning Algorithms With Automated Learning Rate Adjustments	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Frontiers in Robotics and AI	6. 最初と最後の頁 77
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3389/frobt.2019.00077	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kaito Sakurai, Takayuki Jimba, Hideaki Iiduka	4. 巻 3
2. 論文標題 Iterative Methods for Parallel Convex Optimization With Fixed Point Constraints	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Variational Analysis	6. 最初と最後の頁 115 126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.23952/jnva.3.2019.2.01	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hideaki Iiduka	4. 巻 6
2. 論文標題 Distributed Optimization for Network Resource Allocation with Nonsmooth Utility Functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Control of Network Systems	6. 最初と最後の頁 1354 1365
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/TCNS.2018.2889011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Hishinuma, Hideaki Iiduka	4. 巻 282
2. 論文標題 Fixed Point Quasiconvex Subgradient Method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Operational Research	6. 最初と最後の頁 428 437
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejor.2019.09.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideaki Iiduka	4. 巻 21
2. 論文標題 Decentralized Hierarchical Constrained Convex Optimization	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Optimization and Engineering	6. 最初と最後の頁 181 213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11081-019-09440-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kengo Shimizu, Kazuhiro Hishinuma, Hideaki Iiduka	4. 巻 2
2. 論文標題 Parallel Computing Proximal Method for Nonsmooth Convex Optimization With Fixed Point Constraints of Quasi-nonexpansive Mappings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Set-Valued Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 1 17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Hishinuma, Hideaki Iiduka	4. 巻 6
2. 論文標題 Efficiency of Inexact Fixed Point Quasiconvex Subgradient Method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 35 48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kengo Shimizu, Hideaki Iiduka	4. 巻 6
2. 論文標題 Computation Time of Iterative Methods for Nonsmooth Convex Optimization With Fixed Point Constraints of Quasi-Nonexpansive Mappings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 281 286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hideaki Iiduka, Yu Kobayashi	4. 巻 9
2. 論文標題 Training Deep Neural Networks Using Conjugate Gradient-like Methods	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronics	6. 最初と最後の頁 1809
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/electronics9111809	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroyuki Sakai, Hideaki Iiduka	4. 巻 77
2. 論文標題 Hybrid Riemannian Conjugate Gradient Methods with Global Convergence Properties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Computational Optimization and Applications	6. 最初と最後の頁 811 830
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10589-020-00224-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 飯塚 秀明
2. 発表標題 複雑制約付き凸最適化とその応用 -不動点理論で端緒を開く-
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2019年秋季研究発表会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideaki Iiduka
2. 発表標題 Fixed Point Algorithms and Their Applications
3. 学会等名 The International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis-International Conference on Optimization: Techniques and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideaki Iiduka
2. 発表標題 Decentralized Optimization and Its Applications
3. 学会等名 The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

数理最適化研究室へようこそ  
<https://iiduka.net/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	菱沼 和弘  (Hishinuma Kazuhiro)		
研究協力者	酒井 裕行  (Hiroyuki Sakai)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------