

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13382

研究課題名（和文）モジュラス付きChern類と代数的サイクルの高次の構造

研究課題名（英文）Chern classes with modulus and higher structures of algebraic cycles

研究代表者

甲斐 亘（KAI, Wataru）

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：00804296

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：モジュラス付き高次周(Chow)群と高次相対 K 群をつなぐことが本研究計画の主たる興味であった。岩佐亮明氏との共同研究で、アフィンスキームにおいて高次でない周群と相対 K_0 との比較を証明することができた。これを深化するための陳(Chern)類構成の精密化は未達にとどまった。ほかに、Suslinの移動補題の別証明を発見してモジュラス付き周群に応用した。小田部秀介、山崎隆雄の両氏と共同で P^1 不変トランスファー付き層の研究を行なった。関真一郎、見村万佐人、宗政昭弘、吉野聖人の各氏と共同で、Green-Tao定理の数体版を証明した。これを更に強めた定理も証明できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モジュラス付き代数的サイクルは、 A^1 不変な現象に適用範囲を限定しない、より一般のモチーフ理論の構築という昨今の研究の流れの嚆矢となる試みである。この枠組みでの諸現象の探究は、より一般のモチーフ理論がどう構築されるべきか一定の示唆を与えるため、学界から関心を寄せられている。一方、数体の素元の性質の殆どは、翻訳して素数の性質としても理解でき、もとより素数は人々（少なくとも、数学者）の関心を集めてやまないものである。多項式の素数値に関するいわゆるSchinzel予想にも広い意味で関わっていて素数の理論の大きな流れに沿った研究の方向だと思う。

研究成果の概要（英文）：The main interest has been to connect the higher Chow group with modulus and relative higher K -groups. In joint work with Ryomei Iwasa, we showed a comparison of the Chow group with modulus and the relative K_0 of affine schemes. We sought to deepen it by refining the construction of Chern classes with modulus, but we didn't manage to do so within this period. In other directions, we established an alternative proof of Suslin's moving lemma and applied it to the Chow group with modulus. In joint work with Shusuke Otabe and Takao Yamazaki, we studied P^1 invariant sheaves with transfers. In joint work with Masato Mimura, Akihiro Munemasa, Shin-ichiro Seki and Kiyoto Yoshino, we proved the number field analog of the Green-Tao theorem. We went on to prove finer results about how prime elements are distributed in the integer ring of a given number field.

研究分野：代数幾何、整数論

キーワード：代数的サイクル モジュラス 移動補題 陳類 相対 K 群 高次周群 素元 Green-Taoの定理

1. 研究開始当初の背景

Voevodsky らが先鞭をつけた A^1 不変なモチビク・コホモロジーの理論は既に大きな成功を収めていた。 A^1 不変性を外して、スキームの更に細かい情報を反映したモチビク・コホモロジー理論の建設が一部で望まれていた。モジュラス付き代数的サイクルという対象が、少なくともスムーズ多様体に正則埋め込みされた余次元 1 閉部分多様体のモチビク・コホモロジーを与えるのではないかと期待されていた。既に筆者は共同研究で、モジュラス付き代数的サイクルから定義されるコホモロジー群と、相対 K 群の比較写像 (Chern 類写像) の構成に成功していた。一般のスキームに対する A^1 不変でないモチビク・コホモロジーを定義しようという試みは当時はまだ多くの研究者の関心を集めていなかった。

2. 研究の目的

Chern 類写像から派生する Chern 指標写像が、相対 K 群と、モジュラス付き代数的サイクルで定義されるコホモロジー群との同型写像であることを示すことを目指した。そのため代数的サイクルのアーベル群たちのなす複体の性質・構造を十分に研究することを目的としていた。やや具体的には、代数的サイクルの複体から定義されるコホモロジー群は次数可換な環であるが、この背後にあるはずの E_* 構造を明らかにすること、および、代数的サイクルの複体から定義されるコホモロジー群に対して射影束公式を証明することを当面の目標としていた。

3. 研究の方法

代数的サイクルの複体に入った積構造がそのままでは可換ではない。ただし積の順序交換を媒介するホモトピーがとれるため、コホモロジーのレベルでは次数可換な環を与える。この段階ではホモトピーの存在のみが重要で、異なるホモトピーがあってもよく、異なるホモトピーの相互の関係は問われない。 E_* 構造は、ホモトピーのチョイスの空間を記述することに相当する。 E_* 構造の具体的なモデルとして、Segal によるガンマ空間の枠組みを用いることにした。

代数的サイクルの複体から定義される (Nisnevich 位相での) コホモロジー群が射影束公式を満たすことを示せば Chern 指標写像が負の K 群にも延長されるはずであるため、これも重要課題である。位相を用いなくて素朴に複体の (大域切断の) コホモロジーをとると、これが射影束公式を満たすことは知られていた。したがって射影束公式の証明は、ある種の降下定理を意味していた。この証明は、当時活発に押し進められていたモジュラス付き層・モチーフ圏の理論の発展を待って、これを利用する考えでいた。

4. 研究成果

代数的サイクルの複体のガンマ空間構造を書き下す試みは、残念ながら道半ばとなった。既に知られているホモトピーの構成法から考察を深めていき、ホモトピー間をつなぐ高次のホモトピーの構成を試みた。これは数々の関係式を満たす代数的サイクルの族を書き下すことに相当する。その過程で、無限個登場する交叉積がすべて正しく定義されることを保証するために、対応する代数的サイクルの移動補題を証明する必要があるがあった。この移動補題が示せたため、球面スペクトラムに対応するガンマ空間を可逆化した圏でなら代数的サイクルの複体にガンマ空間構造が与えられる可能性までは見えたが、その頃から、モチビク・コホモロジーの一般理論をめくって別の研究手法が有望そうであることが徐々にわかってきたので、論文等にまとめるには至らなかった。

代数的サイクルの複体のコホモロジーの射影束公式も証明するには至らなかった。相互層・モジュラス付きモチーフ圏の理論の発展は着実に進んでいるものの、Voevodsky のモチーフ圏の主要定理の素朴な類似が比較的早期に証明されるかもしれないというのは筆者の楽観的な期待に過ぎなかった。なので層の理論を援用して少ない労力で射影束公式が得られるというシナリオは成就しなかった。代数的サイクル側のテクニックでの証明も試みたが、うまくいかなかった。

そのような中、導来幾何や非ネータースキームを積極的に使うテクニックがモチーフ理論にも活発に応用され始め、Elmanto-Morrow (2022) や Kelly-Saito (2023) によって任意の準コンパクト・準分離的なスキームに対して、良いモチビック・コホモロジーが構成されるに至った。こうして、モジュラス付き代数的サイクルを用いてスムーズでない多様体のモチビック・コホモロジーを構成するという方向性自体が、当初考えていたほど意義のあるものではなくなってしまった。

一方で、以下に述べるような一定の成果はあった。いくつかの展開は当初は予定していない方向性のものであった。

まず、共同研究において、代数的サイクルから定義される群の一部であるモジュラス付き Chow 群と、相対 K_0 群が、スムーズなアフィン多様体とその中の余次元 1 多様体という組に対しては指数有限ねじれを除いて同型であることを証明した。Chow 群は降下性質を持たないため、この結果がそのまま一般の多様体に拡張されることは望めないが、Chern 指標は層レベルで定義できているので、これの局所的な逆写像を与えていることが当時は期待された。

次に、Suslin の移動補題を、別の幾何的構成により再証明した。Suslin の移動補題は Voevodsky らの A^1 不変なモチビック・コホモロジーと Bloch の高次 Chow 群が同型であることの証明で本質的な貢献をしている重要定理である。モジュラス付き代数的サイクルやモチーフ圏の理論でも、Suslin の移動補題の適切な類似が必要となる可能性がある。実は、本研究開始前から既に、筆者の共同研究において Suslin の移動補題の原証明がモジュラス付きの理論にも一定の帰結を持つことが明らかになっていた。新しい構成によって、過去のものよりも更に強い帰結が得られた。

さらに、共同研究で、 P^1 移送付き不変層の研究をおこなった。かかる層の、次のような性質を満たす固有な多様体での値が、基礎体での値と一致するという結果が得られた: 多様体の満たすべき性質は、 CH_0 が自明で、この性質が任意の体拡大ののちも保たれる、というものである。有理的に連結な多様体はこれを満たすため、多様体の有理性のテストとして用いることができる。同様の定理が、 A^1 不変層 (2008) や相互層 (2020-2022) に対しては既に知られていた。

最後に、数体の素元の配置に関して、以下のような成果が得られた。

共同研究で、いくらでも長い素数の等差数列があるとする Green-Tao の定理を一般の数体に対して証明した。Green-Tao の定理は、Tao 氏のフィールズ賞受賞に際しても主要業績として紹介された有名な結果である。ハイパーグラフにおける除去定理という組み合わせ論の理論と、素数分布に係る複雑な計算を組み合わせることで証明された。数体での証明にあたっては、イデアルの理論と組み合わせ論を調和させるところに工夫を要した。同じアイデアを用いて有限体上有限生成な 1 次元整域に対しても同様の定理を証明した。有限体上では、整数環のような標準的な 1 次元の基礎環がない。多項式環に同型な部分環を適切に選ぶことが有限体上で特有のステップとして必要となった。

Green-Tao-Ziegler の、素数がみたす線型方程式という仕事がある。上述の Green-Tao の定理を特殊な場合として含む、大変強力な定理である。これも数体に一般化することができた。ここまで強い定理だと、代数幾何にも応用がある。数体上定義された、ある特殊な形をした代数多様体が、有理点の存在に関する Hasse 原理を満たすことを示すことができた。これは以前は Green-Tao-Ziegler の定理を用いることで、有理数体上でのみ知られていた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Kai Wataru, Otabe Shusuke, Yamazaki Takao	4. 巻 10
2. 論文標題 Unramified logarithmic Hodge-Witt cohomology and P^1 -invariance	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 e19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2022.6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ryomei Iwasa and Wataru Kai	4. 巻 20-6
2. 論文標題 Isomorphism up to bounded torsion between relative K_0 -groups and Chow groups with modulus	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 1947-1968
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1474748020000055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Wataru Kai	4. 巻 1
2. 論文標題 A moving lemma for algebraic cycles with modulus and contravariance	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 475-522
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnz018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ryomei Iwasa and Wataru Kai	4. 巻 236
2. 論文標題 Chern classes with modulus	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 84-133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2018.52	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Wataru Kai	4. 巻 42-1
2. 論文標題 Notes on a p-adic exponential map for the Picard group	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 35-49
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179262	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 甲斐巨
2. 発表標題 数体に対するGreen-Taoの定理
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Wataru Kai
2. 発表標題 Algebraic cycles with modulus and some relative K-groups
3. 学会等名 The Asia-Australia Algebra Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Wataru Kai
2. 発表標題 Algebraic cycles with modulus and some relative K-groups
3. 学会等名 p-adic chomology and arithmetic geometry 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Wataru Kai
2. 発表標題 The Green-Tao Theorem for number fields and beyond
3. 学会等名 Gruppen und topologische Gruppen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Wataru Kai
2. 発表標題 Linear patterns of prime elements in number fields
3. 学会等名 New Directions in Rational Points (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関