

令和 4 年 5 月 14 日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13383

研究課題名（和文）K3曲面の周期による新しい保型形式の構成

研究課題名（英文）New constructions of modular forms via periods of K3 surfaces

研究代表者

永野 中行 (Nagano, Atsuhira)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：30707873

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：K3曲面の周期写像を用いて保型写像を構成し、その整数論的な性質を明らかにすることを旨として研究を進めた。本研究で得られた結果により、整数論で重要なHilbertモジュラー形式、Siegelモジュラー形式、Hermitteモジュラー形式を、格子偏極K3曲面の周期写像を用いて統一的に理解することができるようになった。また、符号数(2,4)や(2,18)の二次形式に付随する直交群をモジュラー群とするようなIV型有界対称領域上の保型形式を、K3曲面の周期を用いることで明示的に構成した。更に、いくつかの場合においては構成された保型形式をテータ関数という重要な特殊関数で明示的に表示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

楕円曲線は19世紀以来の数学で中心的な研究対象であった。例えばフェルマーの最終定理は楕円曲線と保型形式の研究から証明された。そのような純粋数学における意義のほかに、現在の社会においては、楕円曲線は情報技術や暗号などで実際の応用を持つに至っている。その応用を支えているのは楕円曲線が持つ整数論的な性質である。今回の研究ではK3曲面という代数多様体における周期と保型形式の関係を明らかにした。K3曲面は楕円曲線を高次元化したものと考えられる。今回の研究は、楕円曲線における周期の性質をK3曲面に自然に拡張しようという動機に基づく。今回の結果が将来多方面に応用されることを期待している。

研究成果の概要（英文）：We constructed modular forms via the period mapping of K3 surfaces and studied arithmetic properties of such modular forms. Especially, we constructed Hilbert, Siegel, Hermitian modular forms via period mappings for a family of lattice polarized K3 surfaces which are determined by explicit equations. Also, we constructed modular forms on bounded symmetric domains of type IV related to the quadratic form of signature (2,4) and (2,18). Moreover, we obtained expressions of our modular forms in terms of theta functions.

研究分野：特殊関数論

キーワード：K3曲面 周期写像 保型形式 二次形式 Abel多様体 Kummer曲面 鏡映群 超幾何微分方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

古典的楕円積分論や虚数乗法論, 更には Fermat 最終定理の証明などが示唆するように, 楕円曲線の周期と保型形式の関係を明らかにし, それを整数論に応用することは数学における重要なテーマの一つである.

楕円曲線は自明な標準因子を持つ複素 1 次元コンパクト多様体である. $K3$ 曲面は自明な標準因子を持つ複素 2 次元コンパクト多様体であり, 楕円曲線の自然な高次元化とみなすことができる. ゆえに $K3$ 曲面の周期積分を用いて保型形式を構成し, その整数論的な性質を調べることは, 楕円積分の拡張という観点から自然な問題といえる. 楕円曲線の従来の高次元化には Abel 多様体があり, 今まで Abel 多様体を介して保型形式の構成や整数論的な性質の研究が活発になされてきた. 一方 $K3$ 曲面にはミラー対称性という性質がある点, またしばしばトーリック多様体の超曲面として現れることなど, Abel 多様体にはない特性が多くある. 研究開始当初において $K3$ 曲面と保型形式の関係を調べた研究は, Abel 多様体ほど多くはなかったが, 海外では N. Elkies 氏, A. Kumar 氏, C. Doran 氏, A. Clinger 氏, A. Malmendier 氏, V. Gritsenko 氏, 国内では志賀弘典氏, 松本圭司氏, 馬昭平氏らの研究があり, それらの研究では $K3$ 曲面の周期写像を保型形式や整数論へ応用する可能性が示唆されていた.

本研究の代表者は研究開始までに, Hilbert モジュラー形式という整数論で重要な保型形式のうち判別式最小の 2 次体に付随するものを, $K3$ 曲面の周期写像の逆対応を用いて具体的に構成し(2013 年, Kyoto J. Math.), 更にその周期写像を志村曲線の研究に応用することで簡明な志村曲線のモデルを得ていた(2016 年, J. Theor. Nombres. Bordeaux).

2. 研究の目的

本計画の目的は, $K3$ 曲面の周期を用いて保型形式の新しい構成法を与え, その整数論的な性質を明らかにすることである. 特に, 上の項目で述べた Hilbert モジュラー形式の研究で培った研究手法を更に進め, 整数論で重要な保型形式を $K3$ 曲面の周期写像を用いて統一的に構成し, これらの保型形式を $K3$ 曲面のモジュライを通して新しく理解することである.

3. 研究の方法

$K3$ 曲面の正則 2-形式を 2-サイクルの上で積分したものを周期積分といい, 周期積分の比をとったものを周期という. $K3$ 曲面の周期写像とは周期が定める写像である. この周期写像ではトレリ型定理や全射性が証明されており, $K3$ 曲面のモジュライ空間と IV 型有界対称領域の間の対応を与えている. 周期写像を調べる上では Neron-Severi 格子や超越格子という偶格子の性質が非常に重要になる. 本計画では明示的な方程式で定義される $K3$ 曲面を考える. 方程式は曲面の複素構造の変形を与える複素パラメータを含んでいる. このような $K3$ 曲面の格子構造の詳細な考察を経て, 周期写像が変形パラメータと有界対称領域の一対一対応を与えるような状況を作り出すと周期写像の逆対応を通じて, 変形パラメータが対称領域上で定義された保型形式を与えることが証明される. 以上が本計画における $K3$ 曲面を用いた保型形式の構成のあらすじである.

得られた保型形式を整数論に応用するには色々な手法がありうるが, 例えば保型形式をテータ関数という重要な特殊関数で表示することは極めて有効な手段の一つである. テータ関数は志村多様体の一般論と相性が良く, 強力な整数論的な性質を持つことが知られているからである.

志賀弘典氏(千葉大), 植田一石氏(東大), 橋本健治氏(東大), H. M. Sengun 氏(Univ. Sheffield), 林長寿氏(国立台湾大), 松村朋直氏(金沢大)らと密接に情報交換を行いつつ研究を進めた.

4 . 研究成果

(1) K3 曲面の逆周期写像が判別式最小の実 2 次体に付随する 2 変数 Hilbert モジュラー形式を与える場合に, そのモジュラー形式の特殊値を用いて, 判別式最小の実 2 次体の虚 2 次拡大の不分岐類体を構成した(2018 年, Ramanujan J.). この証明では逆周期写像のテータ関数表示が本質的な役割を果たしている. また, Klein の正二十面体不変式と呼ばれる有限群の不変式が重要な役割を果たす. この研究により, K3 曲面の周期, 正二十面体の不変式, Hilbert モジュラー形式とそのテータ関数表示, その整数論的な性質が一体となった成果を得ることができた.

(2) Kneser 条件という二次形式の整数論的な条件がある. この条件を満たす二次形式の直交群は鏡映群として簡明な構造を持つことが知られている. Kneser 条件を満たす最も単純な二次形式を超越格子として持つような格子偏極 K3 曲面の族を明示的に与え, その逆周期写像によって複素 4 次元の IV 型有界対称領域上の保型形式を構成し, それらがなす環の構造を決定した(2021 年, J. Alg.). このとき直交群は保型形式のモジュラー群に等しい.

(3) (2)の結果の整数論的な応用を見込んで, (2)で得られた保型形式を複素 4 次元の IV 型有界対称領域上のテータ関数で明示的に表示した(志賀弘典氏と共著, 2022 年, Transform. Groups, published online). この論文の主定理は, Dern-Krieg の 2003 年の論文で導入されたテータ関数と, Burkhardt が 1890 年に導入した例外型で階数 5 の有限複素鏡映群の不変式を用いて, (2)の K3 曲面の逆周期写像の完全な表示を与える.

(4) 直交群 $O(2,4; \mathbb{Z})$ をモジュラー群とする保型形式のなす環の構造を, 指標が非自明な場合も含め, K3 曲面の周期写像を用いて完全に決定した(植田一石氏と共著, 2022 年, Hokkaido Math. J.). 先行する Clingher-Malmendier-Shaska の 2019 年の論文では指標が自明な場合のみ扱われていたので, 本論文の結果は彼らの結果を更に推し進めたものになっている. また, 本論文で扱った K3 曲面は, 松本-佐々木-吉田により 1992 年に研究された(3,6)型の超幾何関数に付随する K3 曲面と二重被覆の関係にあることを示した.

(5) 符号数(2, 18)のユニモジュラー偶格子を超越格子とするような K3 曲面の族を明示的に取り出し, その逆周期写像が定める保型形式たちがなす環の構造を完全に決定した. 更に, 非自明な指標を持つ保型形式を, Borcherds 積という無限積によって表示した(植田一石氏と共著, 2022 年, Hiroshima Math. J.). この論文で扱った K3 曲面は一般型の楕円 K3 曲面である. また, 今回の Borcherds 積は fake monster Lie 代数の分母公式にも関係している.

(6) 微分作用素のなす可換環に付随するスペクトル代数曲線と保型形式の関係を調べた(2018 年, Comp. Anal. Oper. Theor.). 例えば, 楕円曲線に付随した Lamé の微分方程式に対応する微分作用素を与える可換環から楕円モジュラー形式が構成される. 今回の結果はその一般化を目指している. 保型形式の数論的性質を通じて, 微分作用素に付随するスペクトル代数曲線の整数論的性質の解明や, Lamé の微分方程式の数論的性質を研究する手法を与えることが期待される.

[その他の方向性] 本研究期間における成果から, K3 曲面と複素鏡映群の間に興味深い関係があることが示唆される. また, 本研究代表者は(3)のテータ関数が実モジュラー形式の研究に使えると予想するに至り, 実モジュラー形式の専門家の H. M. Sengun 氏との議論から, (2)の K3 曲面と主偏極 Abel 曲面の Kummer 曲面との関係を明らかにする必要性を認識した. そして(2)の K3 曲面の二重被覆の族が Kummer 曲面族の拡張を与えることを示す論文を執筆した(志賀弘典氏と共著). 更に, (6)の結果の整数論への応用に向け Lamé の微分方程式の専門家である林長寿氏と情報交換を行った. この他にも, K3 曲面のミラー対称性を研究することを目指し, 松村朋直氏が導入した楕円ファイバーを利用しながら K3 曲面の格子構造を決定する研究も進めた.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Atuhira Nagano and Kazushi Ueda	4. 巻 52
2. 論文標題 The ring of modular forms for the even unimodular lattice of signature (2,18)	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 43-51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/h2021012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuhira Nagano and Hironori Shiga	4. 巻 online
2. 論文標題 Geometric Interpretation of Hermitian Modular Forms via Burkhardt Invariants	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 online
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-021-09681-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuhira Nagano	4. 巻 565
2. 論文標題 Inverse period mappings of K3 surfaces and a construction of modular forms for a lattice with the Kneser conditions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 33-63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.07.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuhira Nagano and Kazushi Ueda	4. 巻 51
2. 論文標題 The ring of modular forms of $O(2,4;Z)$ with characters	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 275-286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nagano Atsuhira	4. 巻 46
2. 論文標題 Icosahedral invariants and a construction of class fields via periods of K3 surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 201-227
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-017-9924-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hironori Shiga and Atsuhira Nagano	4. 巻 72
2. 論文標題 One visualization of Shimura's complex multiplication theorem via hypergeometric modular functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 309-330
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Families of K3 surfaces, theta functions and invariants of complex reflection groups
3. 学会等名 Conference on Special Geometry, Mirror Symmetry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 複素鏡映群とK3 曲面の系列を用いた保型形式のモジュライ解釈
3. 学会等名 北陸数論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Toric K3 hypersurfaces, hypergeometric systems and their applications to number theory
3. 学会等名 Monodromy and Hypergeometric Functions International Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Construction of modular forms for a lattice with Kneser conditions via K3 surfaces
3. 学会等名 Younger generations in Algebraic and Complex geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 Kneser 条件を持つ格子の保型形式のK3曲面を用いた構成
3. 学会等名 松江数論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Modular forms for a lattice with the Kneser conditions
3. 学会等名 Journées Arithmétiques (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Moduli of K3 surfaces for the simplest lattice with the Kneser conditions and modular forms
3. 学会等名 Seminar at Istanbul Center for Mathematical Sciences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 Kneser 条件を持つ格子の保型形式のK3 曲面を用いた構成
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 Kneser 条件を持つ格子の保型形式のK3 曲面を用いた構成
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 Kneser 条件を持つ格子の保型形式の逆周期写像による構成
3. 学会等名 玉原特殊多様体研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Algebraic spectral curves from the viewpoint of automorphic forms
3. 学会等名 International Conference on Applied Physics and Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhira Nagano
2. 発表標題 Introduction of elliptic curves and its generalizations
3. 学会等名 Kyoto University International Forum on Advanced Future Studies (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 Kneser 条件を満たす格子の保型形式のK3曲面の周期を用いた構成
3. 学会等名 北陸数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 K3曲面の変形に付随した保型形式
3. 学会等名 金沢大学数理学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 永野中行
2. 発表標題 Kneser 条件を満たす格子による複素4次元空間上の保型形式
3. 学会等名 研究集会「複素領域における函数方程式とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------