

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 19 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13385

研究課題名(和文) 双曲的代数曲線のモジュライに関連する数論幾何学と量子場の理論との融合的研究

研究課題名(英文) Interdisciplinary research of arithmetic geometry and quantum field theory related to the moduli space of hyperbolic curves

研究代表者

若林 泰央 (Wakabayashi, Yasuhiro)

東京工業大学・理学院・助教

研究者番号：80765397

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、任意標数の点付き安定曲線上定義されたoper(常微分作用素の一般化)の理論を確立した。特にdormant operと呼ばれる正標数の然るべき対象についての研究を展開させた。本研究の主結果では、Joshi氏によって予想されたdormant operの生成的個数に関する明示的公式を証明した。これは、dormant operを分類するモジュライ空間に対する理解を深め、相対Grassmann多様体のGromov-Witten不変を計算することにより得られ、 p 進Teichmüller理論とGromov-Witten理論をはじめとする諸々の数え上げ幾何学との繋がりを明らかにするものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式あるいはその解の数論的性質に関する研究は数学において重要なテーマの一つである。本研究では、とくに正標数の場合における微分方程式およびその一般化に対する基礎理論を拡張・構築した。その結果、 p 進Teichmüller理論において展開されるモジュライ理論と組み合わせ論やGromov-Witten理論などの数え上げ幾何との間にある顕著な繋がりを明らかにした。その応用として、微分方程式の数え上げに関する未解決問題を証明した。このように本研究の成果は、代数的微分方程式論に対する新たな手法と観点を導入し、様々な分野の相互的発展を可能にさせるものであり、多大な波及効果が今後期待できる。

研究成果の概要(英文)：In this research, we established the theory of opers (generalizations of ordinary differential operators) defined on pointed stable curves in arbitrary characteristic and their moduli. In particular, it includes the development of the study of dormant opers, which are opers of a certain sort in positive characteristic. As a main result of this research, we given an explicit formula, conjectured by Joshi, for the generic number of dormant opers. We do so by obtaining a detailed understanding of the moduli space of dormant opers and computing the Gromov-Witten invariant for relative Grassmannian varieties. This result reveals an interaction between studies in p -adic Teichmüller theory and certain areas of enumerative geometry, including Gromov-Witten theory.

研究分野：代数幾何学，数論幾何学，モジュライ理論

キーワード：モジュライ空間 微分方程式 oper p 曲率 接続 代数曲線 正標数

1. 研究開始当初の背景

代数曲線上の微分方程式あるいはその解の数論的性質に関する研究の始まりは19世紀まで遡り、それ以降様々な数学的事実が蓄積されてきた。しかし、依然として未解決である Grothendieck-Katz 予想が主張するような「微分方程式や接続の p 曲率 (p は素数) とそれらの解が持つ代数性との関係」に対する理解は、いまだ不十分と言わざるを得ないのが現状である。 p 曲率という不変量に基づいてそのような対象の在り様を研究することは(代数的)微分方程式論の発展において鍵となるものであり、取り組むべき重要な課題といえる。また、研究代表者の先行研究で既に得られている dormant $\mathrm{PGL}(2)$ -oper の数え上げ公式(階数2の Joshi 予想)において、その証明の際に明らかになった p 進 Teichmüller 理論と Gromov-Witten 理論との繋がりは、数論的体上定義された微分方程式やそのモジュライ空間の理論に対する新しい観点をもたらすものである。この繋がりをより深いレベルで理解し詳らかにすることは他分野への波及効果をもたらすことが期待され、推進すべき研究課題である。

2. 研究の目的

本研究では、 p 曲率が零となる(つまり解空間が最大階数をもつ)微分方程式あるいはその一般化である dormant oper のモジュライ理論を展開させ、位相的場の理論の枠組みを用いてそれらに対する数え上げ幾何学を構築する。その帰結として、一般階数に対する Joshi 予想の解決を目指す。また、そのようにして構成したモジュライ空間について(Teichmüller 理論的観点を含む)様々な観点から理解を深め、諸々の数え上げ幾何学との比較などを介して他分野および関連するトピックへの応用を試みる。

3. 研究の方法

本研究は、対数スキーム上の(相対的な定式化を含む)接続付き主束やその p 曲率の一般論を整備することから始める。その後、対数幾何学の枠組みのなかで点付き安定曲線族上の(dormant) G -oper (G は半単純代数群)を定義し、それらを分類するモジュライ空間を構成する。当該モジュライ理論を展開する上で特に重要な段階は、代数曲線の退化や変形にしたがって生じる dormant G -oper の振る舞いを詳細に分析し、下部代数曲線の張り合わせに伴う境界条件がどのような(結節点や標点における対数構造から定まる)不変量によって特徴づけられるのかを調べることである。さらに、($G=\mathrm{PGL}(n)$ を含む)しかるべき半単純群 G に対し、完全退化曲線上の dormant G -oper を分類するモジュライ空間の生成的エタール性を示すことによって、所望の数え上げ不変量を持つ分解規則を記述する。

4. 研究成果

(1)本研究における中心的な取り組みとして、点付き安定曲線上の oper (とくに dormant oper) を分類するモジュライ空間に関する一般理論を構築(p 進 Teichmüller 理論の一部や Beilinson-Drinfeld による oper の理論を拡張)した。一連の研究のなかで、対数スキーム上の接続付き主束に関する一般論の構築、(dormant)oper の双対性、モジュライ空間のコンパクト化、コホモロジー群による無限小変形の記述、そして相対 Grassmann 多様体の Gromov-Witten 理論との対応といった様々な性質を明らかにした。最終的な帰結として dormant $\mathrm{PGL}(n)$ -oper の数え上げに関する Joshi 氏の予想を(当初の定式化を超えるかたちで)証明した。そしてその過程において dormant oper の数え上げ不変量が2次元位相的場の理論を構成することを示した。その事実を適用することにより、 $n=2$ に対する fusion ring の環構造と $\mathfrak{sl}(2)$ のアフィン Lie 環に関する共形場理論との比較を考察し、標点付きの場合における(半径のデータによって記述される) dormant $\mathrm{PGL}(2)$ -oper の明示的な数え上げ公式を得た。これらの成果は以下の論文2編のなかで展開されている：

Y. Wakabayashi, "A theory of dormantopers on pointed stable curves" *Asterisque* 432, Soc. Math. de France (2022).

Y. Wakabayashi, "Enumerative geometry of dormantopers" arXiv:math.AG/1709.04235, (2019).

また、当該研究の拡張として Berthelot により導入された有限レベルの微分作用素を用いた「有限レベル dormant oper」なる概念を導入(従来場合はレベル0に相当)し、dormant oper に関する従来の結果をいくつか拡張した。この結果は以下の論文に記載されている：

Y. Wakabayashi, "Differential modules and dormantopers of higher level" arXiv:math.AG/2201.11266, (2022).

さらに、当該研究の中心的定理である Joshi 予想を証明する際に用いた議論を応用するかたちで、dormant $\mathrm{PGL}(2)$ -oper の通常性と被覆の引き戻しとの関係に関する事実を示した。これは以下の論文のなかで展開されている：

Y. Wakabayashi, "Cyclic etale coverings of generic curves and ordinarity of

dormant oper” arXiv:math.AG/1602.07061, (2021).

(2)次に、(1)の研究を土台として(operの変種である)Miura operのモジュライ理論を展開させた。ここでは、正標数の場合に限り双曲的射影代数曲線上にMiura operが存在するという「病理的な」現象に着目し、その現象がどのような応用をもたらし得るのかを考察した。その一つとして、dormant Miura $PGL(2)$ -operと丹後構造との対応を示すことにより、小平消滅定理およびBMY不等式の反例となるような射影代数曲面の(高次元代数多様体によりパラメトライズされる)変形族を構成した。また、下部代数曲線が退化する際の様子を調べることにより、完全退化曲線上のdormant Miura $PGL(2)$ -operおよび付随するMiura変換を彩色グラフを用いて組み合わせ論的に記述した。さらに、点付き射影曲線上のdormant Miura $PGL(2)$ -operとGaudin模型に対するBethe仮説方程式の有限体解を対応づけることによって、このような対象の具体的構成方法を与えた。これらの成果は以下の3編からなる論文にまとめられた：

Y.Wakabayashi, “Moduli of Tango structures and dormant Miura oper” Mosc.Math.J.20 (2020), pp.575-636.

Y.Wakabayashi, “A combinatorial description of the dormant Miura transformation” arXiv:math.AG/1905.03370, (2019).

Y. Wakabayashi, “Gaudin model modulo p , Tango structures, and dormant Miura oper” arXiv:math.AG/1905.03364, (2020).

(3)階数2の安定ベクトル束を分類するモジュライ空間上のVerschiebung写像について研究し、その生成的次数の明示的評価を与えた。これは研究(1)においてJoshi予想を示す際に適用された双対Grassmann多様体との対応やGromov-Witten不変量の計算と同様の議論によって得られたものであり、本研究の議論の汎用性を示している。この結果は以下の論文に記載されている：

Y.Wakabayashi, “An upper bound on the generic degree of the generalized Verschiebung for rank two stable bundles” arXiv:math.AG/2201.11262, (2022) .

(4)Belyi写像に関する研究を実施した。Belyi写像とは代数曲線から射影曲線へ高々3点上でのみ分岐する被覆のことであり、このような写像の存在や次数評価は、代数曲線の定義体の数論性や組み合わせ論的記述(dessin d'enfant)と深く関わっている。今回は、正標数における(tame分岐のみを許し、特定の点で不分岐になるという強い条件を満たす)Belyi写像の存在を示し、最小次数の値を上から(種数のみを用いて)具体的に評価した。この結果は有限体上の代数曲線において良い座標近傍系を取ることができるとを示している。それは正標数の射影直線と一次分数変換を局所モデルとして構築される(本研究が土台としている)幾何学が持つ顕著な性質を捉えたものである。この結果は以下の論文にまとめられている：

Y.Wakabayashi, “An effective version of Belyi theorem in positive characteristic” J.Number theory 231 (2021),pp.251-268.

(5)(代数曲線とは限らない)一般次元の代数多様体においてdormant $PGL(2)$ -operの概念を拡張させ、正標数のCartan幾何およびEhresmann構造の幾何学を展開させた。この研究では、Frobenius-Ehresmann構造なる概念を導入し、その基礎理論の構築および構造群が特殊な場合(Frobenius射影構造、Frobeniusアフィン構造)についての分類を代数曲線、代数曲面、射影空間、そしてAbel多様体の場合に推し進めた。そしてEhresmann-Weil-Thurston原理の正標数類似と呼ぶべき定理を、クリスタルを用いて定式化し、証明した。この研究の成果は以下の2編からなる論文にまとめられた：

Y. Wakabayashi, “Frobenius projective and affine geometry of varieties in positive characteristic” arXiv:math.AG/2011.04846, (2020).

Y. Wakabayashi, “Frobenius-Ehresmann structures and Cartan geometries in positive characteristic” arXiv:math.AG/2109.02826, (2021).

(6) p 進Teichmüller理論やdormant $PGL(2)$ -operのモジュライ理論に関するシンプレクティック幾何学的性質について調べた。この研究では、「通常冪零固有束付きの代数曲線を分類するモジュライ空間が持つGoldmanシンプレクティック構造」と「代数曲線のモジュライ空間の余接束が持つ(Liouville形式から誘導される)シンプレクティック構造」の比較同型を示した。これは、Riemann面の一意化写像を用いたS.Kawai, P.Ares-Gastesi, I.Biswas, B.Loustauらによる比較定理の正標数類似と呼ぶべき結果である。また、dormant $PGL(2)$ -operやその同値な概念であるFrobenius射影構造を用いて、テータ因子の全空間上(これは自然なシンプレクティック構造を持つ)にFrobenius変形量子化が標準的に構成されることを証明した。これは、D.Ben-ZviおよびI.Biswasによるリーマン面上の変形量子化に関する先行研究の正標数類似と呼ぶべきものである。これらの結果は以下の論文にまとめられた：

Y.Wakabayashi, “Symplectic geometry of p -adic Teichmüller uniformization for ordinary nilpotent indigenous bundles,” Tunisian J.Math.(2022), to appear.

Y.Wakabayashi, “Quantization on algebraic curves with Frobenius-projective structure” Lett.Math. Phys.112 (2022) .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 巻 20
2. 論文標題 Moduli of Tango structures and dormant Miura opers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Moscow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 575-636
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.17323/1609-4514-2020-20-3-575-636	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 巻 16
2. 論文標題 Categorical representation of super schemes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 1635-1672
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2020.v16.n5.a10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 巻 59
2. 論文標題 Spin networks, Ehrhart quasipolynomials, and combinatorics of dormant indigenous bundles	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 649-684
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 巻 231
2. 論文標題 An effective version of Belyi theorem in positive characteristic	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Number theory	6. 最初と最後の頁 251-268
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Symplectic geometry of p-adic Teichmuller uniformization for ordinary nilpotent indigenious bundles	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tunisian J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 巻 112
2. 論文標題 Quantization on algebraic curves with Frobenius-projective structure	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Lett. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 Frobenius-projective structures on higher dimensional varieties
3. 学会等名 2nd Kyoto-Hefei Workshop on Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 Enumerative geometry of dormant opers
3. 学会等名 Representation Theory and D-modules (the University of Rennes 1) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 Symplectic geometry of p-adic Teichmuller uniformization
3. 学会等名 The 8th East Asia Number Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若林泰央
2. 発表標題 Dormant Miura opers and Tango structures
3. 学会等名 代数幾何学セミナー (東京大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若林泰央
2. 発表標題 正標数の線型常微分方程式の数え上げについて
3. 学会等名 大岡山談話会 (東京工業大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 Symplectic aspects of the p-adic Teichmuller uniformization
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2018 (東北大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若林泰央
2. 発表標題 Enumerative geometry of dormant opers
3. 学会等名 Langlands and Harmonic Analysis (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 What is a Frobenius-projective structure?
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム(オンライン開催) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 Introduction to p-adic Teichmuller theory
3. 学会等名 Promenade in Inter-Universal Teichmuller Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuhiro Wakabayashi
2. 発表標題 The Gaudin model and pathology in positive characteristic
3. 学会等名 The 6th Uppsala University-Tokyo Tech Joint Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Yasuhiro Wakabayashi	4. 発行年 2022年
2. 出版社 Societe mathematique de France	5. 総ページ数 296
3. 書名 A theory of dormant opers on pointed stable curves	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------