様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

KAKENHI 科研費

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　６ 月 １０ 日現在

機関番号：１３５０１

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：１８Ｋ１３３８７

研究課題名（和文）asid加群の構成に関する研究および応用の検討

研究課題名（英文）On constructions of asid bimodules

研究代表者

山浦　浩太（Yamaura, Kota）

山梨大学・大学院総合研究部・准教授

研究者番号：６０６３３２４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：環とその両側加群があるとき，自明拡大と呼ばれる操作によって次数付き環が構成できる．その次数付き環が岩永-Gorenstein環となるとき，自明拡大に用いた両側加群をasid加群という．本研究では，asid加群の構造に関する研究を行い，いくつかの興味深い知見を得た．例えば，ある代数に対して，任意のasid加群はasid数1のasid加群とテンソル積について冪零な加群の直和であること，asid数1のasid加群の集合にはテンソル積による群構造が入ることを観察した．これを参考に，ある一般的な設定の下で上記と類似の主張が成立することを明らかにした．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の対象であるasid加群は近年に導入・深く研究され，その表現論的意味が明らかになったばかりの加群である．従ってまだ，それほど知見が蓄積していない研究対象である．本研究により，asid加群の研究ではasid数1のasid加群およびその一般化が重要であり，そこには群という良い構造が現れること，適当な設定の下では傾複体との関係があることなどが示された．これにより，asid加群は既存の数学的対象と結びついており，豊かな構造を持つことがわかってきた．

研究成果の概要（英文）：From an algebra R and its bimodule C, one can construct a graded algebra so called the trivial extension. If the trivial extension is Iwanaga-Gorenstein, then the bimodule C is called an asid bimodule over R. In this study, we analyzed structures of asid bimodules, and obtained several results. For example, we had the following two observations of asid bimodules over some algebra R. Every asid bimodule is a direct sum of an asid bimodule whose asid number is one and a nilpotent bimodule with respect to tensor product. The set of all asid bimodules whose asid numbers are one have a structure of a group. In the context of these observations, we showed that the similar claims hold under suitable setting.

研究分野：環の表現論

キーワード：asid加群　岩永-Gorenstein環　自明拡大環　導来圏　安定圏

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

　この報告書では，代数はすべて体 K 上の有限次元代数とする．本研究の研究対象は次数付き岩永-Gorenstein 代数である．本研究の背景は 2020 年に発表した源氏と私の先行研究にある．代数 R とその両側加群 C があるとき，自明拡大と呼ばれる方法によって次数付き代数 A が構成できる．この自明拡大 A が次数付き岩永-Gorenstein 代数となるような両側加群 C を asid 加群という．源氏と私は asid 加群の表現論的研究を行い，次の事実を証明した．

定理．R を代数，C をその両側加群とする．これらが適切な仮定を満たすとき，次が成立する．

(1) C が asid 加群であるための必要十分条件は，
　　完全導来圏 perR の許容部分圏 U で次を満たすものが存在することである．
　　・導来テンソル関手-$\otimes^{\mathbb{L}}_{R}$C が U の自己同値を与える．
　　・導来テンソル関手-$\otimes^{\mathbb{L}}_{R}$C が U の右直交圏に冪零に作用する．

(2) (1)の同値条件が成り立つとき，U=thick(C^n)を満たす非負整数 n が存在する．
　　ここで C^n は C の自己導来テンソル積を n 回とったものである．
　　また，thick(C^n)は C^n を含み，直和因子で閉じた perR の最小の三角部分圏である．
　　U=thick(C^n)を満たす最小の非負整数を C の asid 数と呼ぶ．

(3) (1)の同値条件が成り立つとき，A の次数付き Cohen-Macaulay 加群の安定圏と
　　U=thick(C^n)は三角圏同値である．

　この定理(1)より C の表現論的特徴付けが与えられ，(2),(3)により C は A の Cohen-Macaulay 表現論において極めて重要な意味を持つことが明らかとなった．

２．研究の目的

　上記で述べた事実から asid 加群を利用した岩永-Gorenstein 代数の表現論の進展が期待される．それには asid 加群の具体例を計算・観察し，知見を得ることが不可欠である．しかしながら，asid 加群の具体例を計算することは容易ではない．その理由として，そもそも片側加群に比べて両側加群を扱うのが難しいということ，asid 加群の特徴付けがどれも複雑であるために具体的な両側加群が asid 加群であるかどうかを確認するのが困難であるということが挙げられる．そこで本研究では asid 加群の基礎的研究として，「asid 加群を豊富に構成する手法の確立」を目的とする研究を行った．

３．研究の方法

　研究目的の達成を目指して，次のアプローチによる研究を行った．代数 R に対し，asid 加群全体のなす集合を asid(R)と書く．

(1) R を大域次元有限な代数とする．両側加群 C があるとき，関手-$\otimes^{\mathbb{L}}_{R}$C:perR→perR は perR の Grothendieck 群の変換を引き起こす．この変換を表現する行列を用いて，C が asid 加群であるかどうかを判定する方法を検討した．ただし，この研究では成果が得られなかった．

(2) 既存の asid 加群から別の asid 加群を構成する方法を模索した．例えば，二つの両側加群から新しい両側加群を構成する方法として，直和をとる，拡大をとる，テンソル積をとるなどの操作が考えられる．asid(R)がこれらの操作によって閉じているかどうかについて考察を行った．

(3) R を代数，M を傾 R 加群，S を M の準同型環とする．このとき，三角圏同値 perR≡perS が存在する．asid 加群は完全導来圏に関する条件で特徴付けられるため，何らかの写像 asid(R)→asid(S)の存在が期待される．この写像の存在，および性質について考察を行った．

４．研究成果

　本研究では asid 加群の構成法を確立するに至らなかったが，asid 加群の構造に関する興味深い知見を得ることができた．ここでは便宜のために，代数 R の完全導来圏 perR の許容部分圏 U に対して定理(1)の条件を満たす両側加群 C が存在するとき，U を asid 部分圏という．また，asid 部分圏 U に対して定理(1)の条件を満たす asid 加群全体のなす集合を asid(R,U)と書き，asid 数が１である asid 加群のなす asid(R,U)の部分集合を asid^1(R,U)と書く．

(1) Jacobson 根基の二乗が 0 である中山代数の asid 加群について

　一般論構築に向けた資料を得るため，具体的な代数の asid 加群を計算した．本研究では特に Jacobson 根基の二乗が 0 である中山代数に対して，asid 加群の分類を試みた．その中で，巡回箙に長さ 2 の道による関係式を入れて得られる自己入射中山代数 R に対し，asid 加群のおおよその分類が得られた．詳しくは次の通りである．I を箙の頂点の集合で，I に属する頂点同士は矢で繋がっていないものとする．I に対応する R の冪等元を e とする．

・U=thick(eR)は完全導来圏の asid 部分圏である．また，perR の自明でない asid 部分圏はこの形で尽くされる．
・asid^1(R,U)と I 上の置換群との間に１対１対応が存在する．
・asid^1(R,U)には，テンソル積$\otimes_R$を演算とする群構造が入り，前項の１対１対応は群同型を与

える．
・asid(R)の任意の元は，$asid^1(R)$の元と自己テンソル積について冪零な両側加群の直和になっている．
これらの証明では R の自己入射性が強く効いている．一般の自己入射代数に対して，項目 3，項目 4 と同様の事実が成立しているかどうかは興味深い問題である．

上記の代数の他に，A 型の箙に長さ 2 の道による関係式を入れて得られる中山代数に対して，asid 加群の計算を行った．この代数の完全導来圏における asid 部分圏は有限個であり，また直既約両側加群も有限個であるから，原理的には asid 加群の分類が可能である．頂点の数が 3，4 のときに asid 加群の分類が完成しており，現在は一般の場合の分類を考察している．

以上の計算結果を元に，以下に挙げる一般的な成果を得た．以後，R を体 K 上の有限次元代数とし，$R\otimes_K R$ の大域次元が有限であると仮定する．

(2) asid 加群の拡大による記述

$per(R\otimes_K R)$の対象 C が定理(1)の条件を満たすとき，C を asid 複体と呼ぶ．この asid 複体に対しても定理(2)と同じ主張が成り立つ．今，asid 数が 1 の asid 複体全体のなす集合を $Asid^1(R,U)$と表す．

源氏と私の先行研究において，asid 数が a の asid 加群 C に対して，三角錐 $RHom(C^a,C)\otimes^{\mathbb{L}}_R C^a \to C \to n(C)$の存在が示されている．本研究では，asid(R,U)の任意の元 C に対して，$RHom(C^a,C)\otimes^{\mathbb{L}}_R C^a$は $Asid^1(R,U)$の元であり，また n(C)は自己導来テンソル積$\otimes^{\mathbb{L}}_R$について冪零な複体であることを証明した．従って，任意の asid 加群は asid 数が 1 の asid 複体と自己導来テンソル積について冪零な複体の拡大で出来ている．この結果は(1)項目 4 の類似である．

(3) asid 複体のなす集合の群構造

(1)の自己入射中山代数 R の研究では，perR の asid 部分圏 U に対し，$asid^1(R,U)$は$\otimes_R$を演算とする群になることを述べた．この主張は一般の代数 R では成立しない．しかし，$asid^1(R,U)$の一般化である $Asid^1(R,U)$を考えると，この集合には導来テンソル積$\otimes^{\mathbb{L}}_R$を演算とする群構造が入ることを証明した．従って，$Asid^1(R,U)$に属する二つの asid 複体 C,D に対して，新しい asid 複体 $C\otimes^{\mathbb{L}}_R D$ が得られる．

ここで，$Asid^1(R,perR)$は R の両側傾複体のなす群である．この群の単位元は R であり，特に加群である．一般の $Asid^1(R,U)$においても単位元が加群であることを期待したが，具体例の計算によって単位元は一般に加群ではないことが分かった．

(4) 部分傾複体による asid 複体の構成

両側加群を扱うのは難しいため，片側加群から asid 加群を構成する方法を考察した．最初に次の事実を証明した．e を R の冪等元，S=eRe，$C=Re\otimes_S eR$ とする．もし Re が射影右 S 加群であるならば，C は $asid^1(R,thick(eR))$の元である．次に eR を部分傾加群や部分傾複体に置き換えても同様の主張が成立するかどうかを考察し，次の主張を得た．

V を perR の部分傾複体とする．U=thick(V)とし，S を V の自己準同型代数とする．ここで，$\Phi(V)=RHom(V,R)\otimes^{\mathbb{L}}_S V$ とすると，次の主張が成り立つ
・Φ(V)は $Asid^1(R,U)$の元であり，しかも単位元になっている．
・自然な全単射 F: $Asid^1(S,perS)\to Asid^1(R,U)$が存在する．
項目 1 より，片側加群の複体である部分傾複体から asid 複体が構成できることがわかった．しかし，二つの部分傾複体 V,W に対して，thick(V)=thick(W)ならばΦ(V)とΦ(W)は同型であることが従うため，片側加群の複体から非同型な asid 複体を豊富に構成するには至らなかった．また，項目 2 から，asid 数が 1 の asid 複体の分類問題は，ある代数の両側傾複体の分類問題と同等であることがわかった．

(5) 傾加群による asid 加群間の対応

「3．研究の方法」(3)で述べたことを最も基本的な設定，R は遺伝代数，M は単純射影 R 加群 P に対する APR 傾加群，に対して研究を行った．その結果，R の asid 加群 C に対して次の条件が同値であることを証明した．A を R の C による自明拡大とする．
・$D=M\otimes_R C\otimes_R Hom_R(M,R)$は S の asid 加群である．
・P が$(R/P)\otimes_R C$ の直和因子ではなく，またその双対の条件も満たす．
・$U:=M\otimes^{\mathbb{L}}_R A$ は A の傾複体である．

この同値条件が満足されるとき，S の D による自明拡大を B とすると，U の準同型環は B と同型になる．よって，A と B は導来圏同値であり，さらに Cohen-Macaulay 加群の安定圏は同値であることが従う．この成果により，asid(R)の部分集合から asid(S)への写像が得られたことになる．しかも，その写像は自明拡大上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏を保つ．今後はこの写像により両側加群の箙表現がどのように変化するのか，その記述を明らかにしたい．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　1件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Kota Yamaura
２．発表標題 Happel's functor and homologically well-graded Iwanaga-Gorenstein algebras
３．学会等名 The Eighth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 山浦　浩太
２．発表標題 次数付き環の岩永-Gorenstein 性と三角圏
３．学会等名 第64回 代数学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Kota Yamaura
２．発表標題 On homologically well-graded Iwanaga-Gorenstein algebras
３．学会等名 International Conference on Representations of Algebras 2018（国際学会）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kota Yamaura's Homepage https://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~kyamaura/index.html

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関