

令和 2 年 5 月 28 日現在

機関番号：23901

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2019

課題番号：18K13393

研究課題名(和文) 多重ゼータ値, 多重アイゼンシュタイン級数に付随するリー代数の研究と次元予想の展望

研究課題名(英文) The outlook for the dimension conjecture and the study of Lie algebras of multiple zeta values and multiple Eisenstein series

研究代表者

田坂 浩二 (Tasaka, Koji)

愛知県立大学・情報科学部・講師

研究者番号：30780762

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：実数である多重ゼータ値と複素関数である楕円モジュラー形式について、両者の関係性を示唆するBroadhurst-Kreimer予想(1997)を中心的な課題とする研究を行なった。本研究の一つの成果として、2重ゼータ値とモジュラー形式の明示対応である「モジュラー関係式」に対する解析的な解釈を与えた結果がある。モジュラー関係式はGangl-Kaneko-Zagier (2006)らにより発見され、その意味を巡って様々な研究が発展している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、モジュラー関係式を一つの動機として、多重ゼータ値とモジュラー形式を共通の枠組みで捉える研究がヨーロッパを中心にいくつかおこなわれている。世界的な視点では、むしろ幾何的な方面からのアプローチが盛んであるが、本研究では内在する組合せ的な構造やモジュラー形式の解析理論などに新しい貢献ができたという点において、有意義である。

研究成果の概要(英文)：We study a conjecture proposed by Broadhurst and Kreimer in 1997 stating mysterious relationships between multiple zeta values (real numbers) and modular forms (holomorphic function on the complex upper-half plane). One of the upshots of this project is a newly analytic interpretation of the so-called "modular relation (an explicit correspondence between double zeta values and modular forms)", which was first established by Gangl, Kaneko and Zagier in 2006.

研究分野：整数論

キーワード：多重ゼータ値 モジュラー形式

1. 研究開始当初の背景

本研究の主な研究対象は多重ゼータ値とモジュラー形式である。多重ゼータ値は、1980年代後半ごろに起こった、量子群や有理数体上の絶対ガロア群を3点抜き射影直線の基本群への作用で捉える研究を発端に、ここ2~30年のうちに様々な数学や物理と結びつきながら大変活発に研究されている対象である。一方、モジュラー形式の研究は、古くから整数論の問題の解決において重要な役割を果たしてきた。これら多重ゼータ値とモジュラー形式の間には、ある種の関係性があることが示唆されている。特殊な場合に具体的な現象(以降、モジュラー現象とよぶ)も見つかっており、その現象を理解するための枠組みの開発が喫緊の課題となっている。近年、両者の関係の本質を解明しようという研究がF. Brown、B. Enriquez、R. Hain、A. Levin、M. Matsumoto、T. Terasomaらの仕事を中心として起きている。研究代表者は、Gangl-Kaneko-Zagierらにより導入された多重Eisenstein級数の解析的側面の研究や、F. Brownにより導入された深さ次数化モチビクリー代数の組合せ的側面の研究などを通して、この研究に寄与してきた。

2. 研究の目的

本研究の一つの目標は、20年来の未解決問題であるBroadhurst-Kreimer予想(以下BK予想と呼ぶ)を様々な観点から解析し、部分的な解決を得ることである。BK予想は多重ゼータ値の代数構造にモジュラー形式が深く関わることを示唆する予想である。研究代表者がこれまで培ってきた多重Eisenstein級数の技術や、世界的にもその手法の汎用さが認められているモチビク多重ゼータ値やモチビクガロア群の技術などを援用し、BK予想を多方面から解析することで予想の新たな解釈や部分解決を目指す。具体的には以下の問題に取り組む。

(1) 深さ2のBK予想に対する新たな解釈

深さ2のBK予想は肯定的に解決されており、この場合については、モジュラー形式と多重ゼータ値がなぜ関係するのかということについての直感的な説明を与えることができる。それには、Gangl-Kaneko-Zagier (2006)らにより導入された、多重ゼータ値とモジュラー形式の一種であるEisenstein級数の直接的な共通の一般化ともいえる「多重Eisenstein級数」が役立つ。本研究では、ある2重ゼータ値の関係式とモジュラー形式の周期との間に明示対応があるという(同じくGangl-Kaneko-Zagierらの)結果を、解析的な立場(多重Eisenstein級数の理論)からの新たな切り口の提供を目指す。

(2) 深さ4のBK予想の部分解決

深さ4のBK予想は未解決であり、この解決にはいくつか乗り越えるべき壁が残っている。そのひとつは、モジュラー形式の空間から深さ4の多重ゼータ値の次数化代数への単射(モジュラー形式に対応する代数生成元)が存在することを示すことである。もちろん、「数の世界」でこのことを示すのは難しいので、「モチビクな世界」で示すことがゴールといえるが、この場合にはF. Brownによる二通りの構成法が知られている。一つはモチビクな関係式であるIhara-Takao関係式の帰結として得られる深さ4の代数生成元で、構成法が単射的であるかが未解決であるという問題がある。もう一つは、多重ゼータ値代数のある種の双対である複シャッフル群において構成された深さ4の代数生成元で、こちらは単射的であるがモチビクであるかはわかっていない状況である。この二つの構成法の明示的な対応を予想する式を、安田正大氏(大阪大学)と共同で行った計算の中で見つけており、この予想式を示すことがひとつの目標である。

(3) 多重Eisenstein級数の代数構造

多重Eisenstein級数は、モジュラー形式同様、フーリエ展開をもち、その定数項は多重ゼータ値となっている。また、多重Eisenstein級数で生成される線型空間はモジュラー形式の空間を含む。したがって、多重Eisenstein級数の空間の代数構造を調べれば、多重ゼータ値とモジュラー形式の具体的な関係の導出が期待できる。実際に2重の場合の研究では、2重ゼータ値とモジュラー形式の関係性を具体的に説明することに役立つのだった。3重以上の場合に、先行結果の手法を拡張し、予てから問題となっている「3重以上の場合のモジュラー現象」の解明に取り組む。また、多重ゼータ値で生成される線型空間に対するD. Zagierによる次元予想(1994)は、多くの研究者を魅了する問題であったし、2000年以降に発展した多重ゼータ値とモチーフ理論との結びつきにおいても大いに原動力になった。多重Eisenstein級数の空間についても、次元予想を提唱できるよう数値実験を行う。

3. 研究の方法

- (1) Gangl-Kaneko-Zagier による明示対応は、2 重ゼータ値が満たす線型関係式族とモジュラー形式の周期が満たす線型関係式族のある種の直交性を具体的に記述することで証明される。この対応をよくみると、Eisenstein 級数がカスプ形式(モジュラー形式の一種)と Petersson 内積で直交するという事実から生じる、Kohnen-Zagier (1985)による周期の関係式たちとの類似がみてとれる。この部分の詳しい解析と、A. Popa (2011)による有理周期の理論を援用したカスプ形式を二つの Eisenstein 級数の積(それは2重 Eisenstein 級数の和でかける)に分解する公式を応用することで、Gangl-Kaneko-Zagier の結果を精密化を与える。
- (2) 安田氏との予想式を示すにあたって、予想式をカスプ形式に付随する偶周期多項式に拡張することが不可欠であろう。これが実現できるなら、ヘッケ作用素などのモジュラー形式の理論を予想式の証明に応用できる可能性がある。F. Brown により導入された深さ次数化モチビックリー代数の極化のアイデアも援用し、この問題に取り組む。
- (3) 多重 Eisenstein 級数の次元予想については、効率よく計算するプログラムの開発が必須であろう。研究代表者は共同研究において、多重 Eisenstein 級数とモチビックガロア群のモチビック多重ゼータ値への余作用を記述する Goncharov 余積との対応を示したが、この組み合わせ構造をさらに進化させる形で、この問題に取り組む。また、理論的な側面からの研究として、楕円多重ゼータ値との関係を模索する。楕円多重ゼータ値は、B. Enriquez による楕円 KZB 結合子(多重ゼータ値の Drinfeld 結合子の楕円類似)の研究に最初に現れ、その解析的な研究により、多重ゼータ値と Eisenstein 級数の反復積分で具体的に書き表せることがわかっている。多重 Eisenstein 級数も多重ゼータ値と Eisenstein 級数に共通する対象であるため、両者の関係が注目されている。楕円多重ゼータ値の明示公式の構造を詳しく解析することにより、多重 Eisenstein 級数との関係を明らかにする。

4. 研究成果

- (1) Eisenstein 級数とカスプ形式から得られる Kohnen-Zagier の関係式の詳しい解析により、Hecke 固有形式を2重 Eisenstein 級数で表す公式を得た。この公式にはある種の一意性があり、また Gangl-Kaneko-Zagier が示した2重ゼータ値の関係式からモジュラー形式を直接的に復元するような結果にもなっている。さらに、重さ12のカスプ形式と Eisenstein 級数のフーリエ係数がみたすラマヌジャン合同式と呼ばれるものとの関連して、このカスプ形式が与える2重ゼータ値の関係式の係数を mod 691 でみると和公式(これは Eisenstein 級数と対応する2重ゼータ値の関係式)と結びつくことを示した。この公式に更なる研究の余地があることを示唆する結果となった。論文は Proc. Amer. Math. Soc. より2020年に出版された。
- (2) 安田氏との予想についての進展は得られなかったが、極化されたモチビックリー代数の構造について、J. Ecalle と F. Brown による独立にされていた研究を共通の枠組み(F. Brown のセッティング)で統一する仕事を N. Matthes 氏(Oxford 大学)との共同研究で行なった。具体的には、両者が独立に構成した「極化深さ次数化複シャッフルリー代数」から「極化複シャッフルリー代数」への同型写像が本質的に異なるものであること、その差が重さ0深さ4のところにも現れることを突きとめた。これが深さ4のモジュラー形式に対応する代数生成元と関係するのかが不明であり、今後の課題である。論文は Kyushu. J. Math. より2019年に出版された。
- (3) 多重 Eisenstein 級数を効率よく計算するプログラムの開発に至らなかったが、深さ次数化に関する空間の次元の計算を進めた。この計算から、3重の場合のモジュラー現象がどのような形で起こり得るのか、知見を得ることができた。また微分構造についても数値的な観測を行なったが、その背後にある代数構造を予見するほどのデータは得られなかった。楕円多重ゼータ値との対応についても、具体的な対応は見出せそうになかったため、楕円多重ゼータ値のある種の特殊値と関係する「多重モジュラー値」を用いたモジュラー現象の解明に取り組んだ。多重モジュラー値は、F. Brown による系統的な研究が展開されており、種数1の曲線の moduli という視点からモジュラー現象を解明する鍵となることが期待されている。これについて、数値計算するプログラムを作成し、数値実験のもと、ある2重モジュラー値で生成される空間の構造に関する予想を得ている。この予想の解決が課題として残った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tasaka Koji	4. 巻 148(1)
2. 論文標題 Hecke eigenform and double Eisenstein series	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 53--58
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nils Matthes, Tasaka Koji	4. 巻 73(2)
2. 論文標題 On Ecalle's and Brown's polar solutions to the double shuffle equations modulo products	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 337--356
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 1件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Hecke固有形式と2重Eisenstein級数
3. 学会等名 2019年日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Period polynomial relations for double zeta values
3. 学会等名 第12回ゼータ若手研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 ヘッケ固有形式と2重アイゼンシュタイン級数
3. 学会等名 第12回東京電機大学数学講演会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 レベル付き 2重ゼータ値のモジュラー関係式について
3. 学会等名 関西多重ゼータ研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Koji Tasaka
2. 発表標題 The Gangl-Kaneko-Zagier relation and the Ihara-Takao relation
3. 学会等名 Kyushu multi-zeta seminar (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Broadhurst-Kreimer予想について
3. 学会等名 第26回整数論サマースクール
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Koji Tasaka
2. 発表標題 Multiple zeta values and modular forms
3. 学会等名 Taiwan-Japan Joint Workshop on Multiple Zeta Values (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Anatomical decomposition of zeta elements
3. 学会等名 慶應義塾大学 代数セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 4点抜き射影直線上の反復積分の和公式
3. 学会等名 名古屋大学 解析数論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 多重ゼータ値と複シャッフラー代数の極化
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 様々な多重ゼータ値の統一理論に向けて
3. 学会等名 愛知数論セミナー
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

田坂浩二のwebページ http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~tasaka/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考