様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　5 年　6 月　6 日現在

機関番号：３２２０３
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ１３３９４

研究課題名（和文）標数0および正標数における重さ1のモジュラー形式の明示的計算とその応用

研究課題名（英文）Explicit computations of weight one modular forms including the cases over finite fields and their applications

研究代表者
小笠原　健（Ogasawara, Takeshi）

獨協医科大学・医学部・講師

研究者番号：９０７０９７７６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：有限体上の場合を含む素数レベルの重さ1のモジュラー形式を高速に計算する方法を確立し、その応用として、ただ1つの素数でのみ分岐するPGL(2,7)拡大の新しい例を発見した。 また、本研究より以前に重さ1のモジュラー形式の効果的なアルゴリズムを考案していた G. J. Schaeffer と共同で、素数281でのみ分岐、かつ分岐指数が8であるPGL(2,7)拡大を発見した。モジュラー形式の計算をすることなく、このような代数体を発見することは非常に困難なものと思われる。
さらに、ある仮定の下で、有限体上の重さ1のモジュラー形式に付随するGalois表現の射影像を判別する方法を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
モジュラー形式は数論の研究（整数の性質を調べること）に不可欠なものとなっている。整数の性質を調べることは概して難しいものである一方、モジュラー形式の計算は多項式の計算と同じようにしてできる。本研究では、モジュラー形式を明示的に計算することで、これまで知られていなかった特徴ある整数論的対象を発見することができた。モジュラー形式の計算無しにそのような対象を発見することは困難であったと思われる。具体的な整数論的対象を発見するためにモジュラー形式の計算を応用した１つの事例を与えたことが本研究の学術的意義である。

研究成果の概要（英文）：We established a method of fast computation of weight one modular forms with prime level, including the case over finite fields, and applied it to find new examples of PGL(2,7) number fields ramified at a single prime. Also, together with G. J. Schaeffer, who had made up an effective algorithm for weight one modular forms, we found a PGL(2,7) number field ramified only at 281 with ramification index 8. Without modular form computation, it would be so difficult to discover this number field.
Furthermore, under some assumption, we gave a criterion to distinguish a type of projective image of Galois representation attached to weight one modular form over a finite field.

研究分野：整数論

キーワード：法pモジュラー形式　重さ1のモジュラー形式　ガロア群　代数体　ガロア表現

１．研究開始当初の背景

モジュラー形式の理論は，Galois 表現との結びつきによって数論の中で重要な地位を占めている．Hecke固有形式のq展開はGalois表現とほぼ同等のものであり，モジュラー形式のq展開の具体的な計算方法を考案することの意義は大きい．重さが 2 以上の場合には，モジュラー記号を使ったアルゴリズムが知られているが，重さが 1 の場合には効果的な計算方法が知られていなかった．また，有限体上の重さ 1 のモジュラー形式のなかには，複素数体上の正則な重さ 1 のモジュラー形式に持ち上がらないものが存在することが知られている．このような重さ 1 のモジュラー形式を nonliftable form と呼ぶ．Buzzard は[1]において，複素数体上と有限体上の両方で適用可能な重さ 1 のモジュラー形式の計算方法の基礎を構築した．その後，Schaeffer により Buzzard の方法が精密化され（[3]），MAGMA などの数式処理ソフトに実装された（ただし，複素数体上のみ）．しかし，Buzzard と Schaeffer の方法は重さ 2 の空間の基底をモジュラー記号で計算する過程が含まれるため，レベルが大きくなると計算効率が悪くなる．また，有限体上の場合，nonliftable form が存在するようなレベルと標数の組合せを知るには，実際に Buzzard や Schaeffer の方法でレベルNと標数pを固定し，都度計算するしか方法がないという難点もある．

レベルNの nonliftable mod p form（ここに，Nとpは互いに素）は，Nの外不分岐な Galois 表現と関連づけられることが知られている．したがって，nonliftable mod p form の存在からレベルNの外不分岐な$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$または$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F})$拡大（$\mathbb{F}$は標数$p$の有限体）の存在を予測することができる．nonliftable form を計算することにより，このような非可解な群を Galois 群にもつ体の存在性や，そのような体における素数の分解の様子を調べることができると期待される．

２．研究の目的

先に述べた計算の困難性や nonliftable form の存在は，重さ 1 の場合に特有の現象である．これらは，特定の Galois 群と分岐素数をもつ代数体の存在性という数論の問題に結びついている．本研究では，重さ 1 のモジュラー形式の明示的な計算方法を開発・整備し，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$や$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F})$を Galois 群にもつ体の構成，およびそのような体の数論を調べることに応用することを目的としている．

３．研究の方法

研究開始時点で，レベルNが法 4 で 3 に合同な素数であるとき，エータ積を利用した重さ 1 のモジュラー形式の計算方法を考案していたため，まず，レベルのNがそのような素数である場合を詳しく調べることにする．この計算において鍵になるのは次の可換図式である；

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & S_1^-(N,\chi,\mathbb{Z}[1/N]) & \xrightarrow{\times\varphi} & S_{k+1}^-(N,\chi,\mathbb{Z}[1/N]) & \xrightarrow{\Phi_1} & \mathbb{Z}[1/N]^{\oplus d} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ p} \\
0 & \longrightarrow & S_1^-(N,\chi,\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\times\varphi} & S_{k+1}^-(N,\chi,\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\Phi_2} & \mathbb{F}_p^{\oplus d}
\end{array}$$

ここに，pは奇素数，kとdはNの法 12 の値によって決まる正の整数，χは 2 次体$\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$の Kronecker 指標である．φはレベルN，重さkのエータ積であり，そのq展開が$q^d+\cdots$の形のものである．S_*^-は，カスプ形式の空間における Atkin-Lehner 対合の固有関数のなす部分空間を表す．また，Φ_i（$i=1,2$）は$\Phi_i(\sum_{i=1}^{\infty} a_n q^n)=(a_1,\ldots,a_d)$で定義され，$q$展開の$d$番目の係数までを取り出す写像である．レベル$N$が素数であることと，エータ積が複素上半平面上に零点を持たないことから，上段が完全系列であることがわかる．$S_{k+1}^-(N,\chi,\mathbb{Z}[1/N])$の基底の$q$展開は計算可能であるため，それを用いて$\Phi_1$の核の基底を計算することで$S_1^-(N,\chi,\mathbb{Z}[1/N])$の基底を求めることができる．下段については，エータ積の mod p還元の零点の解釈をどうしたらよいかわかっていないため，その完全性はまだわかっていない．しかし，Φ_2の核の次元と$S_1^-(N,\chi,\mathbb{Z}[1/N])\otimes\mathbb{C}$の次元の差を$\alpha_p$とするとき，$\alpha_p=0$ならば nonliftable mod p form は存在しないことがわかる．逆に，$\alpha_p>0$のときは nonliftable mod p form の存在が期待され，実際にq展開を計算することによって nonliftable mod p form の存在を示すことができる．また，この方法でα_pの値を求めるときには繰り返し処理をしないため（行列の階数の計算のみでよい），レベルが大きくなっても比較的短時間で計算が可能である．この計算方法でレベルN

（素数），標数pを動かして多くの例を計算し，どのようなときに$\alpha_p > 0$となるかについて見通しを立てる．さらに，具体的に計算された nonliftable mod p Hecke 固有形式に対して，付随する Galois 表現の像を調べ，その核の固定体に関する数論を調べる．

４．研究成果

上で述べた方法により多くのレベルN（法４で３に合同な素数），標数p（奇素数．以下同様）についてα_pの値を計算した．その結果，次の成果を得た．

(1)　１つの素数でのみ分岐する$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大の新たな例の発見

$p = 7$として$\alpha_7 > 0$となるNを見つけることで，１つの素数Nでのみ分岐する$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大の新たな例を発見した．これは，$\alpha_7 > 0$という計算結果をもとに nonliftable mod 7 form の存在を予測し，実際にq展開を計算し Hecke 固有形式を求め，さらにその Fourier 係数を調べることで，対応する Galois 表現の射影化の像が$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$か$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$のどちらであるかを判別することによってなされた．モジュラー形式を計算してわかるのは，そのような体の「存在」のみであり，具体的な定義多項式を求めるには別途計算が必要になる．前節で述べた nonliftable form の計算の信頼性を得ることも意図して，存在するはずの$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大の定義多項式の探索を行ったところ，意図していた多項式を実際に発見することができた．この作業には少し工夫が必要であった．群$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$は次数 8 であるため，定義多項式を見つけるには 8 次多項式を探索する必要がある．これは一般に計算時間が大きくなるようである．nonliftable form の計算により最初に存在が予見されたのは$N = 4831,5407,6263$であったが，多項式の係数を網羅的に走らせたのでは，時間がかかりすぎて現実的ではないように思われた．そこで，nonliftable form の計算から分岐素数Nと分岐指数（$= 2$）がわかっているため，多項式の mod Nでの分解の形を指定して探索することで，比較的短時間でターゲットの多項式を発見することに成功した．

また，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大を生成する多項式を調べる中で，Malle が構成したパラメータ付き$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$多項式の存在を知った（[2]）．この多項式のパラメータを有理整数に特殊化して得られる$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大は 7 が分岐する．しかし，研究代表者は Malle の多項式に適当な変数変換を施し，有理整数に特殊化しても 7 で不分岐であるような体をたくさん構成できるように改良した．改良された多項式は，1 つの素数でのみ分岐する$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大を高速にたくさん生成することができ，これによっても新たな$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大の例を見つけることができた．しかし，nonliftbale form の計算により発見した，それぞれ$4831,5407,6263$でのみ分岐する$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大は，Malle の多項式の改良版をもってしても生成できないように推察された（未証明）．

本研究での方法は計算速度が速いかわりに，レベルの素数Nに「法 4 で 3 に合同」という制限が付いていることが欠点であった．そこで，G. J. Schaeffer 氏に連絡をとり，レベルが法４で１に合同な素数の場合の，nonliftable mod 7 form の計算を依頼した．その結果，レベルが 281（281 は素数）で位数８の指標をもつ nonliftable mod 7 form が存在することがわかった．Fourier 係数の様子から，この nonliftable mod 7 form は$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大に対応することが予測された．実際に多項式を探索した結果，281 でのみ分岐，かつ分岐指数 8 の$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$多項式を発見することができた．これは判別式が非常に大きいため（判別式は281^7），モジュラー形式の計算無しに発見することは難しいものと思われる．

以上の成果は論文にまとめ，現在国際雑誌に投稿し査読を受けているところである．

(2) １つの素数でのみ分岐する$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大の新たな例の発見

(1)で述べたように，G. J. Schaeffer 氏にレベルが法４で１に合同な素数の nonliftable mod 7 form の計算を依頼したが，その計算で得られた nonliftable mod 7 form のいくつかは，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大に対応するものであった．それらは，レベルの素数のみで分岐し，かつ分岐指数が 4 のものであった．LMFDB などの代数体のデータベースを確認したところ，そのような体の例は非常に少なく，今回発見したものはまだ知られていないもののようであった．これらの$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$拡大についても，(1)の成果と併せて論文にまとめている．

(3) レベルNの nonliftable mod p form に付随する Galois 表現の像に関する知見

さまざまなレベルN（Nは法４で３に合同な素数）と標数pで nonliftbale Hecke 固有形式を計算することで，それらに付随する Galois 表現の像について一定の知見を得た．すなわち，$\dim S_1^-(N,\chi,\mathbb{F}_p) = 1$のときに（$\chi$は 2 次体$\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$の Kronecker 指標），Hecke 固有形式の Fourier 係数が$\mathbb{F}_p$上または$\mathbb{F}_{p^2}$上のどちらで定義されるかによって，付随する Galois 表現の射影化の像が$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$か$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$のどちらになるかを判別することができた．一方，$\dim S_1^-(N,\chi,\mathbb{F}_p) > 1$の場合については，Hecke 固有形式をいくつか計算しているものの，Galois 表現の像に関する規則性を予見するには至っていない．

参考文献

[1] K. Buzzard, Computing weight one modular forms over $\mathbb{C}$ and $\overline{\mathbb{F}}_p$. *Computations with modular forms*, 129- 146, Contrib. Math. Comput. Sci., 6, *Springer*, *Cham*, 2014.
[2] G. Malle, Multi-parameter polynomials with given Galois group. Algorithmic methods in Galois theory. *J. Symbolic Comput.* 30 (2000), no. 6, 717-731.
[3] G. Schaeffer, Hecke stability and weight 1 modular forms. *Math. Z.* 281 (2015), no. 1-2, 159-191.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 小笠原健
２．発表標題 重さ1の mod p モジュラー形式の計算とその応用
３．学会等名 早稲田大学整数論セミナー（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 小笠原健
２．発表標題 重さ1の mod p モジュラー形式の計算と，1つの素数でのみ分岐するPGL(2,7)拡大の探索
３．学会等名 大阪大学整数論・保型形式セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 小笠原健
２．発表標題 1つの素数でのみ分岐するPGL(2,7)拡大の探索 - 重さ1の mod p モジュラー形式の計算の応用 -
３．学会等名 九州代数的整数論2023
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Takeshi OGASAWARA https://sites.google.com/site/takeshiogasawarapapi/home

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関