

令和 5 年 6 月 3 日現在

機関番号：32642

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13395

研究課題名(和文) 岩澤理論に於ける非可換数論的現象の探求

研究課題名(英文) Noncommutative arithmetic phenomena appearing in Iwasawa theory

研究代表者

原 隆 (Hara, Takashi)

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：40722608

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：(1) CM体に対する p 進アルティン L 関数の構成(東京工業大学 落合 理教授との共同研究)，(2) $GL(n) \times GL(n-1)$ のランキン-セルバーグ L 関数の臨界値の一致 p 進整性(北里大学 宮崎 直准教授，東京電機大学 並川 健一准教授との共同研究)，(3) 一般線形群のホイッタッカー周期のモチーフ論的解釈(東京電機大学 並川 健一准教授との共同研究)の3つの課題を中心に研究を実施した。(1)，(2)は論文の完成に向けての最終調整段階に入っており，論文の完成を急ぎたい。(3)に関しては既に論文が完成し，投稿済みである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1)の研究は，Katz等によるCM体の p 進ヘッケ L 関数を貼り合わせて p 進アルティン L 関数の構成を目指すものであり，その過程で先行研究では見られなかった新しい現象が幾つも観察されている。これらの解決は，CM体の非可換岩澤理論の研究の進展につながるものと期待される。(2)，(3)の研究は，保型表現の L 関数の特殊値の研究手法を，表現論の具体的な計算手法と数論幾何学の見地から精密化したものと位置付けられる。本研究成果は，保型表現に付随する p 進 L 関数の構成も含めた保型 L 関数の特殊値の研究のさらなる進展に大きく寄与することが期待される。

研究成果の概要(英文)：During the research period, we are engaged in research of the following three topics: (1) construction of the p -adic Artin L -functions for CM fields (joint work with Tadashi Ochiai at Tokyo Institute of Technology), (2) uniform p -integrality of critical values of the Rankin-Selberg L -functions of $GL(n) \times GL(n-1)$ (joint work with Tadashi Miyazaki at Kitasato University and Kenichi Namikawa at Tokyo Denki University), and (3) motivic interpretation of Whittaker periods of $GL(n)$ (joint work with Kenichi Namikawa at Tokyo Denki University). For (1) and (2), the papers are almost completed, and we are now doing final adjustments. For (3), we have completed to write the paper and submitted it.

研究分野：整数論，数論幾何学

キーワード： L 関数の特殊値 Deligne の臨界値予想 p 進 L 関数 CM体 アルティン L 関数 Rankin-Selberg L -関数 Whittaker 周期 多変数岩澤理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

John H. Coates 等によって 2000 年代に創設された非可換岩澤理論は、古典的な岩澤理論の設定に、代数的 K 理論や導来圏の理論のような先端理論を導入することで、非可換拡大に対しても岩澤理論を展開することを提唱する非常に画期的なものであった。その後、特に総実代数体の非可換岩澤理論は劇的に発展し、2010 年代初頭には Jürgen Ritter, Alfred Weiss, Mahesh Kakde 等により総実代数体の非可換岩澤主予想が (μ 不変量が 0 であるという仮定の下で) 解決されるに至った。さらには総実代数体のヘッケ L 関数の特殊値に関する Brumer-Stark 予想の非可換拡大版 (非可換 Brumer-Stark 予想) に関する研究が David Burns, Andreas Nickel 等により進められたが、それ以降は研究開始時点 (2018 年) に至るまで非可換岩澤理論にまつわる目覚ましい進展が見られない状況が続いていた。非可換岩澤理論は、哲学的にはモチーフの非可換変形に対する数論的現象を探究する学術分野であると捉えることができるが、歴史の浅い分野であることも手伝い、そもそも「モチーフの非可換変形にまつわる数論的現象」について蓄積されたデータが少なく、またその研究手法もいまだ確立したとは言い難い状況にあることが、非可換岩澤理論の研究の発展に対する障碍となっていたと考えられる。

一方で、2000 年代に入ってから高次の代数群の保型表現に付随する保型 L 関数についても、その臨界値の代数性 (Deligne の臨界値予想) や p 進 L 関数の構成が試みられるようになり、「保型表現の岩澤理論」を本格的に展開するための土壌が形成されつつあるように思われる。しかしながら、現状構成されている p 進保型 L 関数は、モチーフに付随する p 進 L 関数についての Coates-Perrin-Riou 予想が要請する性質のすべてを満たしてはいないものが多い。保型表現の岩澤理論を展開するためには、 p 進保型 L 関数の構成のさらなる精密化が必須な状況である。

2. 研究の目的

本研究の究極的な目的は、岩澤理論において観測される様々な非可換数論的現象および困難に対し、それを研究するための手法を確立することである。まず、総実代数体の非可換岩澤主予想の証明 (Ritter-Weiss, Kakde) では、可換拡大の岩澤主予想を 貼り合わせ て非可換拡大の岩澤主予想を導出するという、所謂 Burns-加藤の手法が活用されてきた。この手法はもちろん他のモチーフの非可換変形にも適用できることが期待されるが、総実代数体の非可換岩澤主予想では、元々の (可換拡大に対する) 岩澤主予想自体が、基本的には L 関数の臨界値と岩澤加群のみを用いて定式化されるという理想的に単純化された状況であったため、貼り合わせ の議論が巧く機能していたという側面がある。一般のモチーフの非可換変形においては、そもそも可換拡大に対する岩澤主予想の状況が非常に複雑であるため、貼り合わせ の議論も一段と複雑になるものと予想される。本研究では、特に CM 体の非可換拡大に焦点を当て、貼り合わせ の議論の際に生じる様々な困難を明らかにし、克服する方法を確立することを目的としている。続いて、保型 L 関数の臨界値の代数性および p 進保型 L 関数の構成において、現状得られている結果が満足のいくものとなっていない最大の要因は、無限素点および分岐素点での切断の選び方が正しく正規化されていないことにあると考えられる。本研究では、これ等の素点での切断の選び方の正規化の方法を模索することで、Coates-Perrin-Riou 予想の要請をすべて満たす精密な p 進 L 関数を構成することを目指した。

3. 研究の方法

岩澤理論における 貼り合わせ の議論の改良・一般化については、R. Greenberg による総実代数体の p 進 L 関数の構成に基づいて、CM 体のアルティン L 関数の特殊値を補間する p 進アルティン L 関数の構成を目指した。CM 体の非可換岩澤理論を展開する上で克服すべき課題の 1 つが、付随する非可換 p 進 L 関数が満たすべき補間公式を正しく定式化することであるが、その際には Katz, 肥田-Tilouine による CM 体の p 進ヘッケ L 関数の補間公式を適切に 貼り合わせ が必要がある。Katz, 肥田-Tilouine の p 進ヘッケ L 関数は、総実代数体の p 進ヘッケ L 関数とは異なりガンマ因子やイプシロン因子といった (数論的に重要な) 不変量が多数登場する。したがって、CM 体の p 進アルティン L 関数を構成することは、CM 体の非可換岩澤主予想の解析的議論を遂行するための土台となることが期待される。また、 p 進保型 L 関数の構成については、コホモロジー論的手法により臨界値の解析が可能な $GL(n) \times GL(n-1)$ の Rankin-Selberg L 関数に着目し、特に無限素点での (g, K) -コホモロジーの生成元を具体的に構成することで、Raghuram による臨界値の代数性の結果を精密化することを目指して研究を進めた。

4. 研究成果

CM 体の p 進アルティン L 関数の構成については, R. Greenberg の手法に基づいて, CM 体のアルティン表現で核に対応する体も CM 体となるものに対して, 幾つかの技術的な仮定 (中間体が p で絶対不分離であり, かつ中間体で岩澤予想が成立することを含む) の下で, アルティン L 関数の特殊値を補間する岩澤代数の元 (p 進アルティン L 関数) が構成可能であることをほぼ証明することができた [落合理 (東京工業大学) との共同研究]. 基本的には, アルティン表現のブラウアー分解に対応して Katz, 肥田-Tilouine の p 進ヘッケ L 関数を掛け合わせて構成するが, その際に補間公式がブラウアー分解によらないことと, 先天的には岩澤代数の商体の元として構成される p 進 L 関数が岩澤代数の元となることを (中間体の) 岩澤予想の貼り合わせを用いて示すことが鍵となる. 特に, 中間体の岩澤予想を用いる際に主予想の特殊化を行う必要が生じるが (これは Greenberg による先行研究の状況では現れない現象である), これを過去の落合理との共同研究における手法を用いて解決することができた. イプシロン因子の貼り合わせの計算などに若干課題が残っているため, 現在証明の詳細を詰めている段階である.

Rankin-Selberg L 関数の代数性については, 東京電機大学の並川健一との $GL(3) \times GL(2)$ に対する共同研究の成果を経て, 最終的には基礎体が総虚体の場合に $GL(n) \times GL(n-1)$ の Rankin-Selberg L 関数の臨界値の一般 p 進整性を導出することができた [宮崎直 (北里大学), 並川健一 (東京電機大学) との共同研究]. 宮崎と石井卓 (成蹊大学) によって導入された有理的 Gelfand-Tsetlin 基底を用いて, 一般線形群の既約表現に整構造を導入することが 1 つの鍵となっており, 本研究で培われた表現論を駆使した種々の構成は, より広範な保型 L 関数に適用範囲を広げられるのではないかと期待している.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hara Takashi, Namikawa Kenichi	4. 巻 7
2. 論文標題 A cohomological interpretation of archimedean zeta integrals for $GL_3 \times GL_2$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-021-00294-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hara Takashi, Kitayama Takahiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Character varieties of higher dimensional representations and splittings of 3-manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-020-00590-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 原 隆	4. 巻 1
2. 論文標題 「実 / 複素ゼータの世界」から「p進ゼータの世界」へ	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第26回整数論サマースクール『多重ゼータ値』報告集	6. 最初と最後の頁 57-189
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Takashi Hara
2. 発表標題 On p-adic Artin L-functions for CM fields
3. 学会等名 Number Theory in Tokyo（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 GL(n) × GL(n-1) の Rankin-Selberg L 関数の臨界値の代数性および整性について
3. 学会等名 第2回仙台保型形式小集会「 _ 」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 GL(n) × GL(n-1) の Rankin-Selberg L 関数の臨界値とその代数性, 整性について
3. 学会等名 大阪大学整数論&保型形式セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 GL _n × GL _{n-1} のランキン-セルバーグ L 関数の臨界値とその代数性, 整性について
3. 学会等名 表現論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 GL(n) × GL(n-1) のランキン-セルバーグ L 関数の臨界値とその代数性, 整性について
3. 学会等名 慶應代数セミナー(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 On p-adic Artin L-functions for CM fields
3. 学会等名 L-functions and Motives in Niseko 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 $GL(n+1) \times GL(n)$ の Rankin-Selberg L 関数の臨界値とその代数性, 整性について
3. 学会等名 吹田表現論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 Raghuram-Shahidi の Whittaker 周期のモチーフ論的解釈
3. 学会等名 北陸数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takashi Hara
2. 発表標題 On p-adic Artin L-functions for CM fields
3. 学会等名 Iwasawa theory and p-adic L-functions (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 CM体上の p 進アルティン L 関数について
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 Eisenstein 合同式の手法とその発展について
3. 学会等名 Dasgupta Kakde の最近の仕事とその周辺 Workshop
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 Eisenstein 合同式に現れる尖点形式の構成とヘッケ環の作用について
3. 学会等名 Dasgupta Kakde の最近の仕事とその周辺 Workshop
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 $GL(3) \times GL(2)$ のゼータ積分のコホモロジー論的解釈
3. 学会等名 代数的整数論2020夏 on Zoom (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takashi Hara
2. 発表標題 On equivariant Iwasawa theory for CM number fields
3. 学会等名 The 8th East Asia Number Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 CM体の非可換岩澤理論について
3. 学会等名 九州大学代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 「実 / 複素ゼータの世界」から「p進ゼータの世界」へ
3. 学会等名 第26回整数論サマースクール『多重ゼータ値』 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 代数体の非可換岩澤予想について
3. 学会等名 松江数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 原 隆
2. 発表標題 代数体の非可換岩澤理論を巡って
3. 学会等名 第23回早稲田大学整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

原 隆（整数論）のホームページ https://edu.tsuda.ac.jp/~t-hara/index.html
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------