

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：18001

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13398

研究課題名(和文)関数体上の多重ゼータ値から見た無限素点と有限素点の関係

研究課題名(英文)On the relation between infinite and finite places from the viewpoint of multiple zeta values over function fields

研究代表者

三柴 善範(Mishiba, Yoshinori)

琉球大学・理学部・助教

研究者番号：70737725

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文):正標数の関数体上の無限進多重ゼータ値や v 進多重ゼータ値(v は関数体の有限素点)の研究を行った.具体的には,無限進多重ゼータ値が満たす代数的な関係式は,対応する v 進多重ゼータ値も満たすことを証明した(Chieh-Yu Chang氏とYen-Tsung Chen氏との共同研究).また,その証明で重要となる t 加群の構造を詳しく調べた(Chang氏とNathan Green氏との共同研究).さらに,無限進多重ゼータ値が張る空間の基底を決定した(Chang氏とChen氏との共同研究).

研究成果の学術的意義や社会的意義

無限進多重ゼータ値の間の代数的関係式が v 進多重ゼータ値に伝播するという結果は,その証明手法が新しく,様々な拡張や応用があると考えられる.また,無限進多重ゼータ値が張る空間の基底の決定は,本分野における中心的な課題の一つであった.本結果により,無限進多重ゼータ値への理解が大きく進展したと考えられる.これらの結果の標数0における類似の問題は未解決であり,本研究の結果や証明の手法が,標数0への良い影響を与えると期待している.

研究成果の概要(英文):We studied infinite/ v -adic multiple zeta values over function fields in positive characteristic, where v is a finite place of the function field. More precisely, we proved that the v -adic multiple zeta values satisfy the same algebraic relations that their corresponding infinite-adic multiple zeta values satisfy (joint work with Chieh-Yu Chang and Yen-Tsung Chen). We also studied the structure of the t -module, which is important in the above proof (joint work with Chang and Nathan Green). In addition, we determined the basis of the space of infinite-adic multiple zeta values (joint work with Chang and Chen).

研究分野:数論

キーワード:多重ゼータ値 関数体 周期 t 加群 t モチーフ 線型独立性 Carlitz多重ポリログ 正標数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

実数に値をとる通常の多重ゼータ値(以下, MZV)の関数体類似として, Thakur は 2004 年頃に正標数の関数体の無限進完備化に値をとる MZV を導入した. これは現在では無限進 MZV と呼ばれている. 無限進 MZV は, 通常の MZV との類似, および関数体上特有の現象の両方の側面から近年活発に研究されている対象である. 一方で関数体の有限素点 v に対し, 研究代表者は Chieh-Yu Chang 氏との過去の共同研究において v 進 MZV の定義を与えた. これは標数 0 において古庄により導入された p 進 MZV の関数体類似に相当する対象である. p 進 MZV は, 通常の MZV が満たす関係式を同様に満たすと考えられている. この背景の下, 研究代表者と Chang 氏は過去の研究において, v 進 MZV は無限進 MZV が満たす線型関係式を同様に満たすことを示した. 言い換えると, 無限進 MZV が張る空間 Z から v 進 MZV が張る空間 Z_v に自然な線型写像 F が存在することを明らかにした. この結果により, 無限進と v 進の世界が MZV を通じて繋がり, 両者の研究が表裏一体となった.

2. 研究の目的

本研究の目的は, 正標数の関数体上の MZV を詳しく調べることである. 特に, 無限進 MZV と v 進 MZV の間に得られていた過去の研究結果を土台として, 両者の関係を明らかにする. 本研究の目的をより具体的に述べると, 以下のようにまとめられる.

(1) 線型写像 F の積との可換性

過去の研究で得られていた Z から Z_v への自然な線型写像 F について, 積と可換であるかについては不明であった. しかし, 数値計算により積と可換になることが期待されているので, それを証明する. これが示されれば, 線型関係式だけでなく代数的な関係式までもが無限進から v 進に伝播することになり, 両者の間の結びつきがより強固になる.

(2) t 加群の構造の解明

無限進/ v 進 MZV や, それらの変数付き版である Carlitz 多重(スター)ポリログの代数的点での値(以下, CM(S)PL 値)は, 関数体上の t 加群という対象を用いて記述される. 過去の結果で得られた線型写像 F の存在性はこの事実を用いて示されたものであり, その構造をより詳しく調べることは重要な課題として残っていた. 本研究では, この t 加群の対数関数について, その具体的な記述を試みる.

(3) 関数体上の MZV が張る空間の構造の決定

無限進/ v 進 MZV の研究における大きな目標の一つは, これらの空間の線型/代数的な基底の決定である. 本研究開始時点で, 重さを固定した無限進 MZV が張る Z の部分空間の次元については Todd による次元予想が, 基底については Thakur による基底予想が与えられていた. またこれらの予想を仮定し, Todd の手法等を駆使することで, Z の代数的な生成元についても考察することができる. 本研究ではこれらの問題に取り組む.

3. 研究の方法

(1) Z から Z_v に自然な線型写像 F が存在することの証明では, 無限進/ v 進 MZV を t 加群の対数関数のある座標に実現することが重要であった. 一方で, これらは無限進/ v 進 CMSPL 値を用いて記述できる. 無限進/ v 進 CMSPL 値はそれぞれが収束する範囲においてはスター版の調和積を満たすことが分かるので, 関数体上では MZV よりも扱いやすい対象である. そこで, まずは無限進と v 進の両方で収束するような代数的点における無限進/ v 進 CMSPL 値に対して, 線型写像 F と同様の線型写像が存在することを示す. これは存在すれば積と可換になることが分かる. さらに, このような無限進/ v 進 CMSPL 値を用いて無限進/ v 進 MZV を記述することで, F が積と可換になることを証明する. これには, 関連する t 加群への係数環の作用を詳しく調べ, 無限進と v 進の両方の位相で良い振る舞いをする点列を構成することで実現する.

(2) 問題の t 加群に対応する双対 t モチーフを用いて, t 加群の対数関数の特殊値を記述する. この双対 t モチーフの周期行列には, 無限進 MZV や無限進 CMPL 値の持ち上げが現れる. これは Anderson の理論を通じて, 元の t 加群の指数関数と結びつく. もう少し正確に述べると, 周期行列を用いた Frobenius 方程式の解に対して, その指数関数での値の具体的な記述が得られる. この事実と hyperderivative と呼ばれる作用を用いて, 周期行列や t 加群の指数/対数関数を解析することで, 対数関数の特殊値の全座標の具体的な表示を得る.

(3) Todd の次元予想から, Z の代数的生成元の重さごとの個数を計算することができる. この事実を用いて, Z の代数的生成元の決定を行う. 代数的独立性の証明には, Papanikolas の理論を用いる. 一方で線型空間としての Z の基底の決定には, ABP-criterion と呼ばれる Anderson-Brownawell-Papanikolas により導入された技術を用いる. また, 重さによる帰納法が適用できるように, インデックスの集合を Thakur により与えられたものから, Ngo Dac により考察されたものに変更する. さらに, 無限進 MZV から無限進 CMPL 値に扱う対象を移すことで, 線型独立性を示す.

4. 研究成果

(1) v 進 MZV を定義して Z から Z_v への自然な線型写像 F が存在することを示した Chang 氏との共同研究について, その結果をまとめた論文の改訂作業を行い論文が雑誌に掲載された.

さらに Chang 氏と Yen-Tsung Chen 氏との共同研究により, 無限進 MZV が「無限進と v 進の両方で収束する代数的点」における無限進 CMSPL 値の線型和で表されることを示した. また, そのような無限進 CMSPL 値が張る空間から v 進 CMSPL 値が張る空間への自然な線型写像が存在することを示した. これらの結果を用いることで, 線型写像 F が積と可換であることを証明した. この結果は, 無限進 MZV の間に代数的な関係式が成り立てば, 対応する v 進 MZV の間にも同様の関係式が成り立つことを意味する. 特に, Thakur によって得られていた無限進 MZV の間の積公式が, v 進 MZV に対しても成立することになり, v 進 MZV が張る空間 Z_v が積に関して閉じていることが分かった.

(2) Chang 氏と Nathan Green 氏との共同研究により, 無限進 v 進 MZV や無限進 v 進 CMSPL 値が対数関数の特殊値のある座標に現れるような t 加群の構造を詳しく調べた. 具体的には, 対応する双対 t モチーフの周期として Anderson-Thakur 級数および t モチヴィック CMSPL 値を導入し, それらの Taylor 展開の係数を用いて, この t 加群の対数関数の特殊値の全座標を具体的に記述した.

(3) 本研究期間中に, Thakur により予想された基底が Z を生成することが Ngo Dac により示された. この結果を受け, Chang 氏と Chen 氏と共同で線型独立性の証明に取り組み, Thakur の基底予想が正しいことを証明した. つまり, Thakur により与えられた無限進 MZV の族が実際に Z の基底になることを示した. この系として, 重さを固定した無限進 MZV が張る Z の部分空間の次元を決定した (Todd の次元予想の肯定的解決). また, Z の生成元になることの明示的な記述も与えることで, 具体的に与えられた無限進 MZV を基底の線型結合で表す直接的なアルゴリズムも得られた. さらに (1) の結果と併せることで, 重さを固定した v 進 MZV が張る Z_v の部分空間の次元の上からの非自明な評価を得た. ただし, v 進 MZV に対しては具体的な生成元や次元の下からの評価については分かっておらず, 今後の課題として残った. これらの結果をまとめた論文は, 現在雑誌に投稿中である. 一方で, Z や Z_v の代数的な生成元に関する結果を得ることはできなかった.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 3件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chieh-Yu Chang, Yen-Tsung Chen, Yoshinori Mishiba	4. 巻 10
2. 論文標題 Algebra structure of multiple zeta values in positive characteristic	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Cambridge Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 743 ~ 783
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/CJM.2022.v10.n4.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chieh-Yu Chang, Nathan Green, Yoshinori Mishiba	4. 巻 379
2. 論文標題 Taylor coefficients of Anderson-Thakur series and explicit formulae	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1425 ~ 1474
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-020-02103-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chieh-Yu Chang, Yoshinori Mishiba	4. 巻 223
2. 論文標題 On a conjecture of Furusho over function fields	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Inventiones mathematicae	6. 最初と最後の頁 49 ~ 102
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00222-020-00988-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 13件／うち国際学会 8件）

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 Thakur's basis conjecture for multiple zeta values in positive characteristic
3. 学会等名 Number Theory in Tokyo（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 On multiple zeta values over function fields and their linear independence
3. 学会等名 第5回 青葉山ゼータ研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 Computations of multiple zeta values over function fields
3. 学会等名 Computing Multiple Zeta Seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 Thakur's basis conjecture for multiple zeta values in positive characteristic
3. 学会等名 2022 NCTS Workshop on Function Field Arithmetic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 On linear independence of multiple zeta values in positive characteristic
3. 学会等名 多重ゼータ値の諸相 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 正標数交代多重ゼータ値が張る空間の生成元について
3. 学会等名 2022早稲田整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 On relations among v -adic multiple zeta values over function fields
3. 学会等名 Japan Europe Number Theory Exchange Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 Algebraic independence of certain Taylor coefficients of t -motivic multiple zeta values
3. 学会等名 NCTS Seminar on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 Logarithmic interpretation of Taylor coefficients of t -motivic multiple zeta values
3. 学会等名 Japan-Taiwan joint workshop on multiple zeta values 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 Taylor coefficients of t-motivic multiple zeta values
3. 学会等名 NCTS Seminar on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 On Furusho's conjecture over function fields
3. 学会等名 Arithmetic of Function Fields and Diophantine Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 正標数多重ゼータ値の対数表示
3. 学会等名 東京電機大学数学講演会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 MZV's as Logarithms and Applications II
3. 学会等名 Taiwan-Japan Joint Workshop on Multiple Zeta Values (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三柴善範
2. 発表標題 On multiple zeta values over function fields and their algebraic independence
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
台湾	国立清華大学		
米国	Pennsylvania State University	University of California, San Diego	