

令和 5 年 5 月 22 日現在

機関番号：55401

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13399

研究課題名（和文）表現スキームによるコーエン・マコーレー加群圏の構造解析

研究課題名（英文）Structure Analysis of a Category of Cohen--Macaulay Modules by the Representation Scheme

研究代表者

平松 直哉（Hiramatsu, Naoya）

呉工業高等専門学校・自然科学系分野・准教授

研究者番号：20612039

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：本課題では極大コーエン・マコーレー（MCM）加群に対し、表現論的な観点から考察を行った。MCM加群の同型類のなす集合に対して、加群の退化の関係による位相構造を定義し、その位相による既約閉集合の分類を行った。次数付きMCM加群における表現スキームの考察を行い、次数付きMCM加群の同型類は階数を固定したとき、高々有限個しか存在しないことを示した。またMCM安定加群圏の有限生成関手圏のクルル-ガブリエル次元の計算を行った。基礎環が有限CM表現型のときのクルル-ガブリエル次元は0、任意次元のA加算表現型超曲面環上のMCM加群圏の関手圏のクルル・ガブリエル次元は2であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

MCM加群の退化の関係による位相構造の考察は、幾何学的な性質によったMCM加群の分類例が得られ（例えば基礎環が有限CM表現型ではなくても有限個の既約閉集合による分解が得られる）、分類理論に新しい視点を与える。次数付きMCM加群の表現スキームの考察は幾何学的性質からある種のMCM加群の有限性を与えることができ、表現スキームの有効性やその可能性を示した結果である。さらにクルル-ガブリエル次元の計算はそれ自体が計算することが困難な量であるため、非自明な例を与えたことは重要である。いずれもMCM加群の表現論に寄与する結果であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We define a topological structure for the set of isomorphism classes of MCM modules based on the degeneration relation of the modules and classify the irreducible closed subsets by the topology. The representation scheme of the graded MCM modules is considered. We show that there are only a finite number of isomorphism classes of the graded MCM modules when the rank is fixed. We also calculate the Krull-Gabriel dimension of the functor category of the (stable) category of MCM modules over hypersurfaces of countable CM representation type. We show that the Krull-Gabriel dimension is 0 if the hypersurface is of finite CM representation type and that is 2 if the hypersurface is of countable but not finite CM representation type.

研究分野：可換環論

キーワード：Cohen-Macaulay加群 表現型 module variety 関手圏

1. 研究開始当初の背景

可換環論の主な研究対象である極大 Cohen-Macaulay (MCM) 加群は 1970 年代、Auslander、Reiten らによる一連の論文で、表現論で主要な Auslander-Reiten 理論が MCM 加群において成立することが示され、その個数の有限性と基礎環が高々孤立特異点しかもたないことが同値であることが発表された。このように CM 加群は有限次元多元環上の表現論 (加群論) の自然な高次元化にあたり、代数幾何学と表現論を結び極めて豊富な理論を秘めた対象である。申請者はこれまで MCM 加群の退化理論について、分類理論の側面から研究を進めてきた。偶数次元 A 有限表現型超曲面環上の退化の考察、次数付きを持つ MCM 加群の退化理論の展開を行った。また MCM 加群の安定圏における退化を考察し、射集合の次元と退化の関係を示し、さらには吉野雄二氏との共同研究で、退化の定義を行列表現の言葉で見直すことでいくつかの順表現型について、直既約な MCM 加群の退化の関係を完全に記述することに成功している。本課題で主として考察する表現スキームは加群全体を捉える大域的な考察なのに対し、加群の退化理論は局所的な考察である。これまでの考察から退化の局所的な考察から表現スキームの大域的な考察を行う準備ができたと考えており、以上が本課題の背景である。

2. 研究の目的

本課題の研究目的は、表現スキームの理論を用いて MCM 加群の圏構造を解析し、表現スキームの幾何学的な性質から表現型を特徴付けることである。一般に加群を分類することは不可能だが、加群の次元を制限することで表現スキーム (加群多様体) による階層的な分析が可能になる。従って、階層的な分析である表現スキームの考察は分類理論において重要な意味をなすと考えられる。基礎環が完備であるとき、正則局所環を部分環として含み、このとき、MCM 加群においてもその正則局所環上のスキームとして表現スキームが実現できる。本課題では表現スキームの幾何構造の解析を主たる目標とし、そのために上半連続関数の構成や、接空間を軸にした既約成分と MCM 加群の剛性の関係の考察および、加群の退化とも関係が深い連結成分の特徴付けなどを行う。最終目標として、表現スキームの幾何学的な性質による順表現型の特徴付けを与えることを試みる。

3. 研究の方法

MCM 加群の表現スキームの解析について、これまで申請者が研究してきた表現スキームの局所理論である「加群の退化理論」を土台に行う。表現スキームの接空間の解析については古典的にはコホモロジー群との関係が知られており、同様の考察を適用する。また表現スキームは関手として捉えることができるので、Ollson による関手の接空間の議論を適用し、別の視点からの分析も試みる。既約成分の考察においては、加群の退化の関係を記述する不変量を利用し、連結成分に属する条件を与える。順表現型の典型例である " $k[[x, y]]/(x^2)$ " と " $k[[x, y, z]]/(x^2 + y^2)$ " での計算、比較を通して、幾何学的な性質を表す数値的な条件を探る。上半連続関数の構成については、MCM 加群の退化とも関係の深い射集合の次元や (環が孤立特異点を持つとき MCM 加群圏の商圏では有限次元多元環と同様に射集合による関数が定義できる) Hochster のテータペアリングやコホモロジカル長さ関数などの情報を組み合わせることで関数の構成を検討する。順表現型の特徴付けについては、表現スキームの関手としての性質を吟味し忠実な基底で剰余 0 次元 (有限次元多元環) の状況に帰着する方法を模索、既存の結果を適用することで問題の解決を試みる。

4. 研究成果

(1) MCM 加群の同型類のなす集合に対して MCM 加群の退化の関係による位相構造を定義し、その位相による既約閉部分集合の分解について考察した (名古屋大学の高橋亮氏との共同研究)。基礎環が高次元多元環の場合、加群の退化が推移を満たすかどうかは未解決である。このことについて高橋氏は 2018 年の研究によって、直和を許せば推移性が成立することを示した。この性質をかんがみ、直和を許した加群の退化を考えることによって、加群の同型類のなす集合に対して退化の関係による閉包作用を定義することができる。この点に着目し、MCM 加群の同型類のなす集合に相対位相を定めた。主な結果として、加算 CM 表現型をもつ超曲面環で奇数次元 A 型表現型、任意次元の D 型表現型の場合において、MCM 加群の集合は有限個の既約閉集合による和集合で記述できることがわかった。

(2) 表現スキームを次数付き環上の次数付き MCM 加群を対象に考察を行った。次数付き MCM 加群における表現スキームは [Dao-Shipman, 2017] による先行研究がある。次数付きアフィン代数 R の極大 MCM 加群は R のネーター正規化 S 上自由加群になる。 S 加群としての階数を固定したとき、極大 MCM 加群はある代数多様体の点として実現でき、また同型類は一般線形群の (次数 0 部分の) 軌道に対応する。この関係を吟味し、加算表現型をもつ次数付き CM 環上において以下のことを示すことができた。ここで加算表現型をもつとは、直既約な次数付き MCM 加群の同型類がシフトの差を除いて加算個存在するときをいう。加算表現型をもつ次数付き CM 環

R 上の次数付き極大 MCM 加群の同型類は S 上の階数を固定したとき、高々有限個しか存在しない。さらに R が孤立特異点をもつときには、加算表現型であることと [Drozd-Tovpyha, 2014] の意味で離散表現型であることが同値であるところを示した。またある特定の状況において [Bongartz, 1991] による幾何学版森田同値の類似の結果も得る事ができた。

(3) MCM 安定加群圏の有限生成関手圏のクルル-ガブリエル次元の計算を行った。クルル-ガブリエル次元はモデル理論に由来し、加群圏の短完全列が有限生成関手に対応することを利用して、関手の組成列を見ることで (有限生成関手圏はアーベル圏になる) 短完全列の階層構造を調べるものである。有限次元多元環においては Geigle らによって調べられており、表現型理論にも関係が深い。基礎環が有限 CM 表現型るとき、MCM 安定加群圏の (関手圏の) クルル-ガブリエル次元が 0 であることを得た。これは有限次元多元環で知られている Auslander の結果の類似である。また 1 次元 A 加算表現型の超曲面環 $k[[x,y]]/(x^2)$ 上の MCM 加群圏について、そのクルル-ガブリエル次元を計算し、それが 2 になることを示した。さらに超曲面環 $S/(f)$ と $S[[u]]/(f+u^2)$ 上の MCM 加群圏の間にあるクネーラ型の関手について、その随伴性に注目し、その関手によって誘導される関手圏上の単純関手などの振る舞いを考察した。それにより、一般に超曲面環 $S/(f)$ と $S[[u]]/(f+u^2)$ 上の MCM 加群圏の関手圏のクルル・ガブリエル次元は等しいことを示した。このことから任意次元の A 加算表現型超曲面環上の MCM 加群圏の関手圏のクルル・ガブリエル次元は 2 であることが従う。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naoya Hiramatsu	4. 巻 53
2. 論文標題 Krull-Gabriel dimension of Cohen-Macaulay modules over hypersurfaces of type (A_n)	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the 53rd Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 80-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hiramatsu Naoya	4. 巻 -
2. 論文標題 Geometry of varieties for graded maximal Cohen--Macaulay modules	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-021-01282-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiramatsu Naoya, Takahashi Ryo	4. 巻 148
2. 論文標題 A topology on the set of isomorphism classes of maximal Cohen--Macaulay modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2359 ~ 2369
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiramatsu Naoya	4. 巻 52
2. 論文標題 A remark on graded countable Cohen-Macaulay representation type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 21-25
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiramatsu Naoya	4. 巻 41
2. 論文標題 A note on graded countable Cohen-Macaulay representation type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 41st Japan Symposium on Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 14-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 平松直哉, 高橋亮	4. 巻 40
2. 論文標題 Irreducible components of the topological space of Cohen-Macaulay modules	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第40回可換環論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 71-78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計5件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Naoya Hiramatsu
2. 発表標題 Krull-Gabriel dimension of Cohen--Macaulay modules over (A_∞) -singularities
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoya Hiramatsu
2. 発表標題 Krull-Gabriel dimension of Cohen-Macaulay modules over hypersurfaces of type $(A_)$
3. 学会等名 第53回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiramatsu Naoya
2. 発表標題 A remark on graded countable Cohen-Macaulay representation type
3. 学会等名 The Eighth China - Japan - Korea International Symposium on Ring Theory Nagoya, JAPAN (2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiramatsu Naoya
2. 発表標題 A note on graded countable Cohen-Macaulay representation type
3. 学会等名 The 41st Japan Symposium on Commutative Algebra (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平松直哉, 高橋亮
2. 発表標題 Irreducible components of the topological space of Cohen-Macaulay modules
3. 学会等名 第40回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>NaoyaHIRAMATSU https://www.kure-nct.ac.jp/department/g/original/hiramatsu/index.html 岡山可換代数表現セミナー https://sites.google.com/view/oscarmath2021/oscar-home</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 41st Japan Symposium on Commutative Algebra	開催年 2019年～2019年
-----------------------------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------