

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13401

研究課題名（和文） p 進幾何的手法を用いた捻れ3重積L関数とそのSelmer群の研究研究課題名（英文）Study of Selmer groups of twisted triple products via p -adic geometry

研究代表者

石川 勲 (Ishikawa, Isao)

愛媛大学・データサイエンスセンター・准教授

研究者番号：80804236

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、 GL_2 上のAsai表現に関する局所因子のGalois側と保型側の一致性を再考し、Asai表現に付随する局所因子について GL_2 の場合に明示計算を行い、保型側とGalois側の一致を証明し、その成果を学術誌に投稿し、受理された。これを一般の GL_n に関する一般化を試みた。さらに、コロナ禍の影響を受けつつも、市野池田予想を用いたユニタリ群上の保型表現における肥田 p 進族の構成やintegralityを考慮した p 進L関数の構成の一般化について新しい方針を立てた。 GL_2 の具体的な群の形に依存しない一般的な代数群に内在する構造を用いて、既存の構成方法を再構成することを試みた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、 GL_2 におけるAsai表現の局所因子の一致性を局所的な手法で証明し、さらに GL_n まで考察を広げることによって数論と保型表現論における理論的進展をもたらした。また、捻れ3重積L関数の一般化により、L関数と保型形式の理論を発展させた。さらに、 p 進L関数の構成法の一般化により、 p 進解析に新たな技術が提供することができる。

本研究は、 p 進L関数や保型表現の分野を通じた学術的発展を促進し、新しい理論や手法の確立は、数学コミュニティの活性化に寄与するものである。

研究成果の概要（英文）：In this research, we reexamined the consistency of local factors between the Galois and automorphic sides for Asai representations on GL_2 . We performed explicit calculations of the local factors associated with Asai representations in the case of GL_2 , proving the consistency between the automorphic and Galois sides. These results were submitted to a journal and accepted. We also attempted to generalize these findings to GL_n cases.

Additionally, despite the impact of the COVID-19 pandemic, we developed new strategies for the generalization of the construction of p -adic L-functions, considering the integrality and the construction of the Hida p -adic family in the context of automorphic representations on unitary groups using the Ichino-Ikeda conjecture. We aimed to reconstruct existing construction methods by utilizing structures inherent in general algebraic groups, independent of the specific form of the GL_2 group.

研究分野：整数論

キーワード：捻れ3重積 p 進L関数 保形表現

1. 研究開始当初の背景

本研究は、幾何的な対象から自然に定義される Galois 表現 (または Langlands 対応によって保型表現) に焦点を当てている。これらの表現には、解析的不変量である複素 L 関数の特殊値と代数的不変量である Selmer 群である。これらの対象は密接な関係性が知られており、数論において中心的な研究テーマの 1 つとなっている。例えば、BSD 予想 (Birch-Swinnerton-Dyer 予想) はこの関係性の深さや難しさなどを端的に語る一例である。

研究開始当初、Darmon と Rotger による BSD 予想に対する新たなアプローチが示された。彼らは分裂 3 重積と呼ばれる保形表現を考察し、対応する幾何学的な構造としてモジュラー曲線の直積からなる 3 次元代数多様体に焦点を当てた。この研究では、 p 進解析的方法を用いて、分裂 3 重積 p 進 L 関数と Selmer 群との深い関係を追求し、新しいクラスの楕円曲線に対して、これらの不変量の関連性を明らかにすることに成功した。

これらの成果を踏まえ、研究代表者はこれらの問題を捻れ 3 重積へと拡張することを考えた。特に、 SFS を実 2 次体として、 SFS 上の Hilbert 尖点保形表現と Asai 表現、および楕円尖点保形表現のテンソル積からなる捻れ 3 重積に焦点を当てた。ここから、Hilbert モジュラー曲面とモジュラー曲線の直積から定義される 3 次元代数多様体に付随する Galois 表現や対応する保型表現に新たな光を当てていくことを目指した。

2. 研究の目的

本研究の目的は次の 2 つに集約される。まず、既存の研究がモジュラー曲線の 3 つの直積という幾何学的な構造を扱っていたのに対し、より高次元の多様体である Hilbert モジュラー曲面とモジュラー曲線の直積を考察の対象とするため、先行研究の方法を直接適用することができない。そのため、新たなアイデアとアプローチが必要とされる。この研究を通じて、数論における高次元幾何への理解を深め、今後の数論研究に新たな方法論を提示することを目指している。もう 1 つは Darmon と Rotger による先行研究の単なる拡張にとどまらず、新たな数論への応用が可能となる。特に、実 2 次体 SFS に伴う Hilbert モジュラー曲面を考慮することで、 SFS の選択という新たな自由度を導入し、これが数論的な研究に与える影響は非常に大きいと考えられる。これにより、捻れ 3 重積への拡張というアプローチにより、当該の分野に対して重要なインパクトを与えることが期待できる。

3. 研究の方法

本研究では当初、捻れ 3 重積の p 進 L 関数とその数論的応用に焦点を当てていた。具体的には、複素 L 関数の特殊値と Selmer 群に関連する p 進 Abel-Jacobi 写像を通じて、 p 進 L 関数と p 進 Perrin-Riou regulator とを結びつけることを目指していた。この研究では、Hilbert モジュラー曲面とモジュラー曲線の直積上における p 進 Abel-Jacobi 写像を介してこれらの解析的・代数的対象の間の等式を証明することが主要な目標であった。証明の方針は次のとおりである：まず、素数 p が実 2 次体 F で分裂している場合の仮定を外すことに焦点を当て、既存の技術的なアプローチを再検討する。この過程で、 p が F で分裂している場合と惰性の場合の両方での Coleman 積分の計算を含み、これらの計算から得られる結果は、理論のさらなる発展につながると期待される。研究の次の段階として、さらに、捻れ 3 重積の p 進 L 関数を用いた数論的応用を探求する。これには、実 2 次体 F 上の楕円曲線に関する BSD 予想への新しいアプローチや、新たな数論的モチーフの発見と解析が含まれる。特に、異なる実 2 次体間での楕円尖点形式の L 関数の特殊値の関連性を解明し、新たな数論的構造を明らかにする。

本研究の研究はコロナ禍の真っ只中であり、予定していた出張などができず研究も思うように進まなかった点が多い。そのため、将来の研究として提示していた balanced な重さに関する研究を取り上げ、その p 進 L 関数の構成に再び焦点を当てた。この再考察は、 p 進 L 関数の理論を深めると同時に、さらに一般の代数群に対応する p 進 L 関数の構成につながる期待があった。

4. 研究成果

Asai 表現および捻れ 3 重積保形表現の局所因子に関する乗法性の精密化を進め、 Λ 進 Asai transfer の構築に進展した。Asai 表現や捻れ 3 重積は数論の分野で活発に研究されており、保形表現論や Galois 表現、さらにはモジュラー曲線や Hilbert モジュラー曲面に関連する幾何学的文脈での考察が進んでいる。研究代表者はこれらの表現の局所因子について、Galois 側と保型側の一致性に関する新たな結果を得ることができた。捻れ 3 重積については、捻れ側が主系列で捻れていない側が超尖点表現の場合に、保型側の局所因子の乗法性を示すことができた。また、Bushnell-Kutzko's 理論を応用して問題を解決し、さらなる理論的進展を遂げた。Asai 表現に関連する局所因子については、 GL_2 の場合に明示的な計算を行い、保型側と Galois 側の一致を証明し、その成果を学術誌に投稿して受理された。これは、2018 年度に Raphael による大域的手法を用いた証明がなされていたが、これの局所的な手法のみによる証明という位置付けである。さらに、この手法の一般化に取り組み、 GL_n の場合への拡張に向けた基盤を構築し

た。主系列表現における乗法公式の計算においても、さらなる考察と計算の進展が求められる段階に到達した。

さらに、通常の 3 重積 L 関数に関する中心値の和公式を捻れ 3 重積に拡張する研究を行い、四元数環の order に関する共役類の分類を通じて、いくつかのケースで明示的な計算を行った。この成果により、捻れ 3 重積 L 関数の理論的理解が深まった。

捻れ 3 重積 p 進 L 関数の解析的性質についても研究を進展させ、通常の 3 重積 L 関数の中心値の平均に関する結果を捻れ 3 重積に一般化することに成功した。また、quantum ergodicity conjecture の捻れ 3 重積への拡張に関する考察も行った。

最終年度には市野池田予想を用いた(definite な)ユニタリ群上の保型表現における肥田 p 進族の構成や integrality も考慮した p 進 L 関数の構成の一般化について新しい方針を立てた。GL₂ における Asai 表現のガンマ因子について局所的な議論のみを用いた証明を再考し、これを GL_n に一般化するための具体的な基盤を構築した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chen Shih-Yu, Cheng Yao, Ishikawa Isao	4. 巻 209
2. 論文標題 Gamma factors for the Asai representation of GL ₂	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 83 ~ 146
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/J.JNT.2019.08.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 石川 勲	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Explicit calculation of local integrals for twisted triple product L-functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2019-0004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 石川 勲
2. 発表標題 On comparison of Gamma factors of Asai representations of GL ₂
3. 学会等名 早稲田数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
その他の国・地域	Academia Sinica	National Taiwan University	