

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：24403

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13414

研究課題名（和文）擬トーリック多様体の分類に関する研究

研究課題名（英文）On the classification of quasitoric manifolds

研究代表者

蓮井 翔 (Hasui, Sho)

大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：50792454

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は擬トーリック多様体の分類に関するものである。研究計画において打ち出した「底多面体の切断に着目して非同変な同相を構成する」というアイデアに基づいて足掛かり的な成果を得ており、これを用いることで過去の研究成果について別の方面からも裏付けを与えることができた。一方、別方向からのアプローチとして、擬トーリック多様体と関係の深いモーメント・アングル多様体、およびその軌道空間（擬トーリック多様体もここに含まれる）の特性類に関する研究を行い、こちらに関しては一定の成果を得た。この成果はすでに論文にまとめて投稿しており、現在査読中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トーリックトポロジーは位相幾何学、代数幾何学、組み合わせ論などの諸分野の交差的領域であり、今回成果を得た対象である擬トーリック多様体とモーメント・アングル複体は組み合わせ的幾何学と位相幾何学の橋渡しをする位置にある。擬トーリック多様体に関する成果は組み合わせ的情報のトポロジーへの反映をより柔軟に捉えるための基礎となりうるものであり、モーメント・アングル複体についても特性類の観点からこれまであまり省みられていなかった部分に光を当てることができた。

研究成果の概要（英文）：The subject of this research is to study the classification of quasitoric manifolds. With the idea, posed in the research plan, that we can construct some non-equivariant homeomorphisms between quasitoric manifolds by cutting the quotient polytope, I obtained some foundational results, which support some known classification results in a different direction. On the other hand, as another approach to this kind of manifolds, I studied the moment-angle manifolds and their quotient manifolds, which include the quasitoric manifolds, from the viewpoint of characteristic classes, and obtained some new results. Those results have already been made up into a manuscript and submitted to a journal.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：擬トーリック多様体 トーリックトポロジー 代数的位相幾何学

## 1. 研究開始当初の背景

擬トーリック多様体とは偶数次元の閉微分多様体であって、その半分の次元のコンパクトトーラスの「よい」作用を持ち、かつその軌道空間が凸多面体となるようなものをいう。擬トーリック多様体はある種の組み合わせ的データから構成することができ、さらに弱同変同相のレベルで見ればそうした組み合わせ的データとの対応関係が非常によく分かっていたのだが、一方弱同変とは限らないような同相を考える場合には、一般的なことはほとんど分かっていないといってよい状態にあった。擬トーリック多様体の分類に関する研究成果はその大部分が個別的な計算に強く依拠したものに止まっており、上記の問題を解消していくことでこの問題に進展をもたらしたいというのが本研究の動機であった。

## 2. 研究の目的

(1) 過去の共同研究で用いた手法を一般化し、非同変同相レベル、あるいはホモトピー同値レベルでの情報を組み合わせ側の情報から直接取り出すことを目指した。

(2) 擬トーリック多様体の分類に関する研究が個別的な計算に依らざるを得ない理由としては、擬トーリック多様体というものの全体像が組み合わせ的データとの対応を通じてしか理解できておらず、そのために否応なく個別的な計算が問題になるという側面もあった。そこで同じ問題意識の下、擬トーリック多様体というものの別側面からの把握ということも研究目的の一つであった。

## 3. 研究の方法

(1) 擬トーリック多様体の軌道空間である凸多面体を切断するとき、これに応じて擬トーリック多様体の方も 2 つの部分に分割され、さらにその切断面の形も組み合わせ的データから理解できる。このことに着目し、擬トーリック多様体をこのような切断面に沿って 2 つの境界付き多様体を貼り合わせたものと考え、さらにこの貼り合わせの写像を然るべき Lie 群の作用を通して捉えることにより、擬トーリック多様体の同相型、あるいはホモトピー型を変えずにトーラス作用のみを取り替える、ある種の手術のような操作を確立できないか試みた。また、過去の研究で用いた方法としては一般コホモロジー論を用いて局所安定ホモトピー型について調べるといふものもあったが、こちらはうまくいかなかった。

(2) 擬トーリック多様体はモーメント・アングル多様体と呼ばれる多様体を自由なトーラス作用で割ったものと同じと見ることができる。つまり擬トーリック多様体を包含するクラスとしてモーメント・アングル多様体の自由なトーラス作用による商からなるクラスがあり、こちらの方面から擬トーリック多様体というクラスを理解できないかという方針での研究も試みた。その足がかりとして、上記のことにより擬トーリック多様体らはモーメント・アングル多様体という特徴的な主トーラス束をもつので、その分類写像に着目することで研究を行った。

## 4. 研究成果

(1) 切断面に着目する方針に関しては、切断面が単体である場合に従来知られていた同変連結和の手法の拡張となる成果が得られたのだが、まだ適切な応用例を見つけられていない。今後擬トーリック多様体についてより具体的な計算を行い、その中でこの成果の重要性を確認したいと考えている。

(2) 擬トーリック多様体をモーメント・アングル多様体との関係から見る方針については、上述の分類写像をコホモロジーレベルで調べることにより、モーメント・アングル多様体の商多様体の特性類について一定の成果を得られた。この成果はかなり広い範囲での Stiefel-Whitney 類の消失を示すものであり、これまであまり考えられていなかった方向から擬トーリック多様体やモーメント・アングル多様体に光を当てた研究になっている。今後他の特性類を考える、あるいは実モーメント・アングル多様体等類似した空間について考えるといった方向で話が広がるのは勿論のこと、モーメント・アングル多様体の商多様体のクラスにおける擬トーリック多様体の特徴づけというような、擬トーリック多様体全体の新たな方向からの理解に向けて一歩

踏み出した結果にもなりうると考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Hasui Sho, Kishimoto Daisuke, So Tseleung, Theriault Stephen	4. 巻 147
2. 論文標題 Odd primary homotopy types of the gauge groups of exceptional Lie groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1751 ~ 1762
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14333	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hasui Sho, Kishimoto Daisuke, Tsutaya Mitsunobu	4. 巻 21
2. 論文標題 Higher homotopy commutativity in localized Lie groups and gauge groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 107 ~ 128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2019.v21.n1.a6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Hasui, Hideya Kuwata, Mikiya Masuda, Seonjeong Park	4. 巻 rny161
2. 論文標題 Classification of Toric Manifolds over an n-Cube with One Vertex Cut	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny161	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Sho Hasui
2. 発表標題 The Stiefel-Whitney classes of a moment-angle manifold are trivial
3. 学会等名 Toric Topology 2022 in Osaka (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 蓮井翔
2. 発表標題 On the classification of quasitoric manifolds
3. 学会等名 京都大学代数トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sho Hasui
2. 発表標題 On the quasitoric manifolds over a simple polytope with one vertex cut
3. 学会等名 Homotopy Theory Symposium 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Hasui
2. 発表標題 On the quasitoric manifolds over a simple polytope with one vertex cut
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蓮井翔
2. 発表標題 On the quasitoric manifolds over a simple polytope with one vertex cut
3. 学会等名 微分空間・トポロジーと組み合わせ構造 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蓮井翔
2. 発表標題 Classification of toric manifolds over an n-cube with one vertex cut
3. 学会等名 ホモトピー沖縄 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Hasui
2. 発表標題 On the quasitoric bundles
3. 学会等名 Mapping Spaces in Algebraic Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Hasui
2. 発表標題 On the quasitoric bundles
3. 学会等名 International seminar on Toric Topology and Homotopy Theory for young researchers (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	岸本 大祐  (Kishimoto Daisuke)	九州大学・数理学研究院・教授  (17102)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	木津 暁  (Kizu Akatsuki)	京都大学・理学研究科・大学院生    (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関