

令和 4 年 6 月 2 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13415

研究課題名（和文）変形エルミート・ヤン・ミルズ接続と線束平均曲率流の基本的な性質の解明

研究課題名（英文）Study of fundamental properties of deformed Hermitian Yang-Mills connections and line bundle mean curvature flows

研究代表者

山本 光 (Yamamoto, Hikaru)

筑波大学・数理解物質系・准教授

研究者番号：50778173

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の変形には障害はなく、モジュライ空間は（高次元の）トーラスになることが分かった。また、変形ドナルドソン・トーマス接続という新しい対象も研究した。こちらは変形エルミート・ヤン・ミルズ接続とは異なり変形に障害があることが分かった。研究の過程で、Spin(7)多様体上での変形ドナルドソン・トーマス接続の定義をより良いものに修正した。実フーリエ向井変換を利用して、線束のエルミート接続のなす空間に「体積」という概念を導入し、体積汎関数の勾配流や臨界点の解析を行なった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

変形エルミート・ヤン・ミルズ接続や変形ドナルドソン・トーマス接続は、ミラー対称性により特殊ラグランジュ部分多様体や他の特殊ホロノミーを持つ多様体内の特殊部分多様体と密接に関係し合っている。しかし、発見の経緯上、後者はよく研究されているが、前者の研究は少ない。本研究の結果は、特殊ラグランジュ部分多様体や他の特殊部分多様体に対して期待される性質は、概ね変形エルミート・ヤン・ミルズ接続や変形ドナルドソン・トーマス接続に対しても期待して良いということを言っている。これにより、前者の研究がより活発化することが期待できる。

研究成果の概要（英文）：I proved that the deformation of a deformed Hermitian Yang-Mills connection has no obstruction and the moduli space is a higher dimensional torus. I also studied deformed Donaldson-Thomas connection as a relatively new concept. I proved that the deformation of a deformed Donaldson-Thomas connection has an obstruction. During the study, I refined the definition of deformed Donaldson-Thomas connections. By using the real Fourier-Mukai transform, I introduced a notion of volume for Hermitian connections on a Hermitian line bundle, and did analysis of the negative gradient flow and critical points of this volume functional.

研究分野：微分幾何学

キーワード：変形エルミート・ヤン・ミルズ接続 変形ドナルドソン・トーマス接続 特殊ラグランジュ部分多様体  
特殊ホロノミー モジュライ空間 変形理論 ミラー対称性 フーリエ向井変換

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

1990年頃、物理学者によってミラー対称性という現象が発見された。「ミラーペアと呼ばれる2つのカラビヤウ多様体  $X$  と  $Y$  の間では、双方の幾何学的対象がある変換で移りあう」というのがその概要である。1996年、Strominger と Yau と Zaslow は  $X$  が  $B$  という底空間上のトーラスファイバー束の全空間の場合、各トーラスの双対を  $B$  上に並べることで  $Y$  が得られると予想した。ただし、各トーラスは  $X$  内の特殊ラグランジュ部分多様体であることが仮定されていた。これによって特殊ラグランジュ部分多様体の研究が盛んに行われるようになった。与えられたカラビヤウ多様体の中にどのようにして特殊ラグランジュ部分多様体を構成するか？ということに焦点を絞れば、現在ではラグランジュ平均曲率流の方法が有力である。ミラー対称性との関連を強く意識した研究として、2000年に Leung と Yau と Zaslow は、 $X$  と  $Y$  がトーラス束のミラーペアとして得られている場合に、 $X$  サイドの特殊ラグランジュ部分多様体は  $Y$  サイドでは、 $Y$  上の変形エルミート・ヤン・ミルズ接続というものになることを発見した。この発見により変形エルミート・ヤン・ミルズ接続と特殊ラグランジュ部分多様体の重要性は等しいということが分かった。しかし、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の研究は特殊ラグランジュ部分多様体の研究に比べて極めて少なく、その基本的な性質さえもよく分かっていないのが現状である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的の一つは「特殊ラグランジュ部分多様体やラグランジュ平均曲率流に対して確立された結果は、そのミラー対応物である変形エルミート・ヤン・ミルズ接続や線束平均曲率流に対しても同様に成立するか？」という問いに回答を与えることである。言い換えれば、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続や線束平均曲率流の基本的な性質の解明である。

## 3. 研究の方法

Leung と Yau と Zaslow による特殊ラグランジュ部分多様体と変形エルミートヤンミルズ接続の対応関係は実フーリエ向井変換と呼ばれ、外のカラビヤウ多様体がトーラス束であり、さらに特殊ラグランジュ部分多様体関数の勾配のグラフで与えられているような場合は、完全に具体的に記述できる。従って、この状況を Toy Model として、まずはどのようなことが起こりそうか、何が正しそうか、どのような量を考えることに意義があるか、おおよそのあたりをつけることができる。これを手がかりにして、一般のカラビヤウ多様体上での一般の変形エルミート・ヤン・ミルズ接続に対して、予想された定理を拡張した上で証明する。重要そうな幾何学的量は一般の場合でも定義できるように定義を修正する。少なくとも前半の部分は、特殊ラグランジュ部分多様体やラグランジュ平均曲率流に関する既存の論文をステップバイステップに翻訳していけばある程度の結果は出る。

## 4. 研究成果

本研究に関連する論文は4編ある。下記の①～④である。各論文で得られた結果を概説する。全て、学習院大学の河井公大朗氏との共同研究となっている。河井氏はこの研究の初期から本研

究に多大な関心を寄せて頂き、また本研究に絶大な貢献をして頂いた。この場を借りて感謝する。

さて、論文 では、特殊ラグランジュ部分多様体のモジュライ空間の研究アナロジーにより、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続のモジュライ空間の構造を研究した。特殊ラグランジュ部分多様体のモジュライ空間の各連結成分は、モジュライ空間の元である特殊ラグランジュ部分多様体の1次ベッチ数が次元となるような滑らかな多様体になる。特に変形の障害はない。この論文では、これと同様のことが変形エルミート・ヤン・ミルズ接続に対しても成り立つことを証明した。変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の変形には障害はなく、モジュライ空間は滑らかな多様体になる。さらに、次元は底空間であるカラビヤウ多様体の1次ベッチ数となる。このことが分かったしばらく後に、明治大学の今野宏氏からの指摘を受け、より詳しく構造を調べたところ、モジュライ空間は(高次元の)トーラスになることまで証明できた。特にモジュライ空間は連結コンパクトである。これは特殊ラグランジュ部分多様体との顕著な違いであり、興味深い。またこの論文では、変形ドナルドソン・トーマス接続という新しい対象も研究した。これは研究開始当初は予期していなかったものである。変形ドナルドソン・トーマス接続は Lee と Leung によって導入された G2 多様体上の特殊な接続で、coassociative 部分多様体のミラーになっている。こちらは変形エルミート・ヤン・ミルズ接続とは異なり変形に障害があることが分かった。障害がない場合、モジュライ空間は底空間の1次ベッチ数を次元とする滑らかな多様体になる。これは連結ではないが、各連結成分はトーラスになることまで分かった。

論文 では、論文 の延長として、Spin(7)多様体上での変形ドナルドソン・トーマス接続の変形理論というものを考えた。こちら当初は意識していなかった研究対象ではあるが、ミラー対称性により部分多様体論の結果が接続の幾何にどう翻訳されるか?という観点としては、本研究のテーマに密接に関連している。Spin(7)多様体内の Cayley 部分多様体を実フーリエ向井変換すると Spin(7)多様体上での変形ドナルドソン・トーマス接続になる。これは Lee と Leung の結果である。ただし論文 で述べるように、我々は定義を Lee と Leung のものより改良した。結果は以下である。まず変形には障害があり、障害類は Reyes Carrion の定義した標準複体により定義される。障害が消えればモジュライ空間は滑らかな多様体になるが、次元に関しては一般的には何も言えない。ただし Spin(7)構造が torsion free ならば次元は底空間である Spin(7)多様体の1次ベッチ数になる。また、ある程度弱い条件の下で、Spin(7)構造を generic に摂動することで、障害を消し、モジュライ空間を滑らかにすることもできる。研究当初は特殊ラグランジュ部分多様体と変形エルミート・ヤン・ミルズ接続のミラー対応しか見ていなかったが、他の特殊ホロノミーを持つ多様体上での特殊幾何との対応もかなり発見できた。これは当初は予想できなかった副産物である。

論文 では、論文 で研究した Spin(7)多様体上での変形ドナルドソン・トーマス接続の定義を再考した。上で少し書いたが、実は Lee と Leung の原型の定義からやや定義を修正した。当初は Lee と Leung の定義のまま変形理論を構築していたが、どうにもうまくいかない部分があり、そもそもの定義が妥当かどうか再検討をした。その結果、Lee と Leung の定義は、Cayley 部分多様体の条件とは完全に同値ではないことが分かった。この論文では実フーリエ向井変換を厳密に再計算し、Cayley 部分多様体の条件と完全に同値となるような変形ドナルドソン・トーマス接続の定義を与えた。また、この定義の方が優れていると考えられる根拠をいくつか挙げた。例えば、この定義を使うと、部分多様体の方で知られている Cayley equality というものの変形ドナルドソン・トーマス接続バージョンが再現できる。他にも、変形エルミート・ヤン・ミルズ接

続や  $G_2$  多様体上での変形ドナルドソン・トーマス接続と整合的になるというメリットもある。

論文 では、実フーリエ向井変換を利用して、線束のエルミート接続のなす空間に「体積」という概念を導入し、体積汎関数の勾配流や臨界点の解析を行なった。最初に、勾配流の短時間存在を証明した。これは Jacob と Yau がエルミート計量の線束平均曲率流に対して証明してあった短時間存在の結果の自然な拡張になっている。また、特殊ラグランジュ部分多様体は(そのホモロジー類内で)体積が最小になるという有名な性質を持つが、そのミラーと言える性質は変形エルミート・ヤン・ミルズ計量に対して既に Jacob と Yau にとり証明されている。しかし  $Spin(7)$  や  $G_2$  の場合の変形ドナルドソン・トーマス接続に対しては証明されていなかった。この論文では、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の場合も含め、 $Spin(7)$  や  $G_2$  の場合の変形ドナルドソン・トーマス接続に対しても、我々が定義した意味での「体積」が最小になるということを証明し、さらにその体積の値が線束の位相不変量で書けることまで証明した。また、ある種の自明性、つまり平坦なエルミート線束上には平坦な特殊接続しか存在しないということも証明できた。

#### <引用文献>

K. Kawai and H. Yamamoto. Deformation Theory of Deformed Hermitian Yang-Mills Connections and Deformed Donaldson-Thomas Connections. to appear in J. Geom. Anal.

K. Kawai and H. Yamamoto. Deformation Theory of Deformed Donaldson-Thomas Connections for  $Spin(7)$ -manifolds. J. Geom. Anal. 31(2021), no. 12, 12098-12154.

K. Kawai and H. Yamamoto. The real Fourier-Mukai transform of Cayley cycles. Pure Appl. Math. Q. 17(2021), no. 5, 1861-1898.

K. Kawai and H. Yamamoto. Mirror of volume functionals on manifolds with special holonomy. to appear in Adv. Math.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kawai Kotaro, Yamamoto Hikaru	4. 巻 17
2. 論文標題 The real Fourier-Mukai transform of Cayley cycles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 1861 ~ 1898
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2021.v17.n5.a7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kawai Kotaro, Yamamoto Hikaru	4. 巻 31
2. 論文標題 Deformation Theory of Deformed Donaldson-Thomas Connections for Spin(7)-manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 12098 ~ 12154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-021-00712-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kawai Kotaro, Yamamoto Hikaru	4. 巻 32
2. 論文標題 Deformation Theory of Deformed Hermitian Yang-Mills Connections and Deformed Donaldson-Thomas Connections	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-022-00898-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kawai Kotaro, Yamamoto Hikaru	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Mirror of volume functionals on manifolds with special holonomy	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計26件（うち招待講演 23件 / うち国際学会 13件）

1. 発表者名 山本光
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の基礎と最近の研究
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山本光
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続のモジュライ空間
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2020（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山本光
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ（dHYM）接続入門
3. 学会等名 対称空間の部分多様体とその時間発展（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山本光
2. 発表標題 線束平均曲率流とdYHM接続のモジュライ空間
3. 学会等名 対称空間の部分多様体とその時間発展（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山本光
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続のモジュライ空間
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山本光
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の基礎と最近の研究
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 An epsilon regularity theorem for line bundle mean curvature flow
3. 学会等名 Trends in Modern Geometry 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続入門
3. 学会等名 東北大幾何セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 An epsilon regularity theorem for line bundle mean curvature flow
3. 学会等名 East Asian Symplectic Conference 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 The moduli space of deformed Hermitian Yang-Mills connections
3. 学会等名 Complex Geometry Seminar of Yau Mathematical Science Center (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 特殊ラグランジュ部分多様体と平均曲率流とそのミラー
3. 学会等名 大阪市立大学数学研究会特別賞受賞講演 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 特殊ラグランジュ部分多様体と平均曲率流とそのミラー
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 Special Lagrangian and deformed Hermitian Yang-Mills on tropical manifold
3. 学会等名 国際数学会議 2018 (ICM 2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 Special Lagrangian, deformed Hermitian Yang-Mills and line bundle mean curvature flow
3. 学会等名 第65回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の幾何学
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続と線束平均曲率流について
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続と線束平均曲率流
3. 学会等名 東京理科大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 -regularity theorem for line bundle mean curvature flows
3. 学会等名 The Workshop on Global Aspects of Projective and Kahler Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hikaru Yamamoto
2. 発表標題 線束平均曲率流の -正則性定理
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	清華大学			