

令和 5 年 4 月 12 日現在

機関番号：35404

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13416

研究課題名(和文) 三次元多様体のオープンブック分解からみた結び目の負値性

研究課題名(英文) Study on the negativities of knots via open book decompositions of 3-manifolds

研究代表者

田神 慶士 (Tagami, Keiji)

広島修道大学・経済科学部・准教授

研究者番号：60778174

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：三次元の図形(多様体)に埋め込まれたいくつかの円周を絡み目という。特に円周が一つするとき結び目という。向きづけられたどのようなコンパクト3次元多様体も適切に絡み目をその多様体から除くことで、円周上の曲面束の構造(円周の各点の上に曲面が乗っているような構造)を持つ。その曲面束において、あるファイバーを一つ固定しその境界にバンドを取り付けると新しい曲面が得られる。

本研究ではその曲面とその境界の絡み目に注目し、その曲面と境界の絡み目の関係をとある不等式で説明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的意義として、絡み目と三次元多様体の接触構造の関係の記述が挙げられる。

古くから、三次元多様体は結び目を用いて研究されており、その接触構造についても例外ではなかった。本研究ではその流れを汲み、フラットブラミングバスケットと呼ばれる、接触幾何学と相性の良い曲面に着目し、その境界に現れる絡み目の性質(特に負値性)とフラットブラミングバスケットのトポロジーを関連付けた。それは従来の研究にない新しい点であり、学術的意義の一つとして考えられる。

研究成果の概要(英文)：A link is an embedding of a disjoint union of circles into a 3-manifold. In the case the number of the circles is one, a link is called a knot. Any 3-manifold can be represented as a surface bundle over a circle after removing a link from the 3-manifold. In the surface bundle, we obtain a new surface from a fiber surface by adding some bands at the boundaries.

In this study, we focus on such surfaces and links appearing in their boundaries. In particular, we explain relations between such a surface and its boundary by utilizing an inequality.

研究分野：位相幾何学

キーワード：絡み目 接触幾何学 フラットブラミングバスケット

### 1. 研究開始当初の背景

三次元球面に埋め込まれた円周を結び目という。結び目はそれ自体が興味深い対象であるだけでなく、2-, 3-, 4-次元のトポロジーや幾何構造の研究に応用を持つ対象である。その中でも正結び目は多くの結び目不変量において特徴的に振る舞うことに加え、3次元接触幾何学における tight 性や Bennequin 不等式、4次元多様体のシンプレクティック構造や結び目同境界理論とも関連するため、多くの研究者によって研究されてきた。

一方で、正結び目の鏡像として負結び目が定義されるが、多くの不変量において鏡像をとる操作は逆元や双対をとるなどの操作に対応することが多く、負結び目は本質的に正結び目と同じものとして扱われていた。ところが、最近の研究代表者の研究により、負結び目が三次元球面のオープンブック分解を通じて、接触幾何学的対象として特徴的な振る舞いをする例が与えられた。この例の存在が本研究をスタートさせるきっかけである。

### 2. 研究の目的

いかなるコンパクトな三次元多様体も、ある絡み目を取り除くことで円周上の曲面束の構造を許容する。この曲面束をオープンブック分解ともいう。三次元球面から自明な結び目を取り除くとファイバーが円板であるようなオープンブックが得られる。これをディスクオープンブックという。オープンブック分解は三次元多様体の接触構造と密接な関係にあり、実際、Giroux 対応と呼ばれる関係によってこの二つの概念は一致する。

オープンブックのあるファイバーの境界に、別のファイバーに乗せることができるバンドをいくつか取り付けると新しい曲面が得られる。これをフラットブラミングバスケットという。特にディスクオープンブック上のフラットブラミングバスケットはディスクにひねりの無いバンドをいくつか取り付けることで得られる。フラットブラミングバスケットはオープンブック上に自然に配置されるため、Giroux 対応の意味でオープンブックと対応する三次元多様体の接触構造と非常に相性が良い。

本研究では、与えられた絡み目を境界を持つフラットブラミングバスケットに着目した。特に、ディスクオープンブックに限定し、そのようなフラットブラミングバスケットを構成するバンドの最小数を境界の絡み目の性質から記述することを試みた。

### 3. 研究の方法

本研究ではオープンブック分解を通じて、フラットブラミングバスケットとその境界の絡み目に三次元多様体の接触幾何学の技術を適用する方法をとった。より正確には、Legendrian realization principle と呼ばれる手法を用いてフラットブラミングバスケットを(1)境界がルジャンドル絡み目で(2)フラットブラミングバスケットがコンベックス曲面、となるように配置し、そのルジャンドル絡み目の不変量を用いてフラットブラミングバスケットを調べる、という手法をとった。また、フラットブラミングバスケットの類似を考える際には、Giroux 対応を用いて接触構造から性質を移植した。特に、三次元多様体の接触構造の性質を調べる上で古典的な不変量である Hopf 不変量や、Gompf によって定義された  $d$ -不変量を用いた。また、ディスクオープンブック分解に対応する球面の接触構造(標準的な接触構造)を扱う際には、ルジャンドル絡み目のサーストン・ベネカン数や回転数、自己絡み数を使って絡み目の性質を調べた。

### 4. 研究成果

研究成果は大きく次の二つである。

1つ目は、境界が与えられた絡み目となるフラットブラミングバスケットのバンドの数を境界の絡み目のクラシカルな不変量を用いて評価したことである。正確には、ディスクオープンブックから得られるフラットブラミングバスケットのバンドの数は境界の絡み目の「最大自己絡み数」と呼ばれる接触幾何学由来の不変量を用いて、下から評価されることを示した。さらに、最大自己絡み数は「負絡み目」のときに大きな値をとるためこの不等式は負絡み目のときに等号成立すると予想された。実際、交点数の小さい結び目についてはこの事実は正しいことが確かめられている。この予想を解決することはできなかったが、負ブレイドの閉包として実現できる絡み目については等号成立することが確かめられた。さらに、ツイスト結び目についても等号成立することが確かめられている。

2つ目はディスクに一回だけひねりを加えたバンドをいくつか取り付けた場合の「フラットブラミングバスケットの類似」を考えて、その際のバンド数と境界の絡み目の関係について記述したことである。このようにして得られる曲面はホップブラミングと呼ばれる操作で説明できる。そのような曲面はあるオープンブック分解のファイバー曲面になることが知られているため、Giroux 対応を用いて接触幾何学の手法を輸入することができる。その結果として、ファイ

パー曲面の安定高と呼ばれる指数を下から評価し、その非有界性を示した。

また、本研究の過程で結び目と4次元多様体に関する結果も得られている。そのうちの 하나가ゼロトレースの等しい結び目の構成に関するものである。

結び目のゼロトレースとはその結び目の0フレミングによって表現されるコンパクト4次元多様体のことである。その境界の3次元多様体は0手術と呼ばれている。例えば4次元多様体が複素構造を持つとその境界の3次元多様体には接触構造が自然に入る。この性質を用いて、4次元幾何学の手法を交えてフラットブラミングバスケットの性質を観察しようとしたが、望ましい結果は得られなかった。しかしながら、その過程でゼロトレースが微分同相な異なる結び目の構成方法を調査し、そのような既存の手法がすべてGompf-Miyazakiによる双対化可能パターンによって記述されることがわかった。この結果はMiller-Piccirilloによって既に示されていたが、研究代表者はその議論を整理し、ほかの理論との関連付けを行った。この結び目のゼロトレースの結果が、現在採択されている「研究課題：結び目のゼロトレースとスライス・リボン予想」の研究を始めるきっかけとなった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Abe Tetsuya, Tagami Keiji	4. 巻 44
2. 論文標題 Knots with infinitely many non-characterizing slopes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 395-421
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj/kmj44301	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tagami Keiji	4. 巻 58
2. 論文標題 A note on stabilization heights of fiber surfaces and the Hopf invariants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bulletin of the Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1097-1107
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4134/BKMS.b200454	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tagami Keiji	4. 巻 52
2. 論文標題 Notes on constructions of knots with the same trace	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32917/h2021005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Tetsuya, Tagami Keiji	4. 巻 30
2. 論文標題 Flat plumbing basket and contact structure	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2150010 ~ 2150010
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216521500103	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Keiji Tagami	4. 巻 56
2. 論文標題 On the Lagrangian fillability of almost positive links	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 789-804
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4134/JKMS.j180399	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Tagami Keiji
2. 発表標題 Annulus presentation and dualizable pattern
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田神慶士
2. 発表標題 0-トレースが等しい結び目の組を構成する3つの方法とその関係
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田神慶士
2. 発表標題 アニュラス表示から構成されるdualizable パターン
3. 学会等名 N-KOOK セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田神慶士
2. 発表標題 結び目のアニュラス表示から得られる双対化可能パターンの自然性
3. 学会等名 2021年度日本数学会 年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田神慶士
2. 発表標題 絡み目のフラットプログラミングバスケット表示と接触構造
3. 学会等名 微分トポロジー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関