

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13424

研究課題名（和文）テンソル圏と部分因子環

研究課題名（英文）Tensor categories and subfactors

研究代表者

荒野 悠輝（Arano, Yuki）

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：40805222

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：作用素環におけるGalois理論の類似と呼ぶべき部分因子環論は、古くは結び目理論との関連に始まり、テンソル圏や場の理論などとの関係で非常に重要な分野である。このような部分因子環論は、現代的な解釈ではテンソル圏の作用素環への作用の分類と思うべきものである。私はこの視点を C^* -環という別のタイプの作用素環に援用し、テンソル圏の C^* -環への作用を分類について考察した。特に、Rokhlin性をもつ作用の分類や、テンソル圏作用のホモトピー論的側面である、テンソル圏同変KK理論の整備などを行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素環論の研究において、その分類は中心的な問題として様々な研究を牽引してきた。

本研究においては、部分因子環論の C^* -環におけるアナロジーを考えることにより、 C^* -環へのテンソル圏作用についての理解を深めた。これは C^* -環の分類理論を押し進めるだけでなく、テンソル圏そのものの研究や場の量子論などの数理物理にも貢献するものである。

研究成果の概要（英文）：The theory of subfactors can be regarded as an analogue of the Galois theory in the operator algebra. It played an important role in the knot theory, the theory tensor categories and the conformal field theory. Such subfactor theory can be interpreted in terms of the actions of tensor categories on operator algebras. In this study, I imported this viewpoint to the C^* -algebras, which is a different kind of operator algebra from the factors and studied the actions of tensor categories on C^* -algebras toward the classification. Especially, I classified the Rokhlin actions and formulated the equivariant KK-theory for tensor category actions, which is a homotopy theoretical aspect of the actions.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 量子群 テンソル圏

1. 研究開始当初の背景

作用素環とは、複素 Hilbert 空間上の有界線形作用素がなす環であり、主な研究対象として、随伴とノルム位相で閉じた C^* -環、随伴と強位相で閉じた von Neumann 環の 2 つがある。可換な C^* -環は局所コンパクトハウスドルフ空間の上の連続関数環に同型であることが知られており、また可換な von Neumann 環は測度空間上の L 関数のなす環に同型であることが知られている。このことから推測されるように、2 つの研究対象は、しばしば互いに関係しつつも、本質的に異なる手法で研究されてきた。

このような作用素環の研究における対称性として、量子群やテンソル圏などが自然に現れる。特に、部分因子環論における Galois 群の対応物としてテンソル圏が現れることは重要である。この文脈では、部分因子環の分類はテンソル圏作用の分類とすることができるが、このような分類は III_0 因子環の場合や C^* -環の場合には知られていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、テンソル圏の解析的・非可換幾何的な性質を明らかにすることである。このような研究は、量子包絡環や座標環などの代数的な研究と、作用素環的な量子群論、部分因子環論などの解析的な研究を結びつけるものであり、作用素環内外での応用が期待される。

3. 研究の方法

本研究では、テンソル圏や量子群の解析的・非可換幾何的な性質について明らかにする。特に、部分因子環論からくる解析的な手法と量子群における代数的な手法を組み合わせる。

4. 研究成果

非保測エルゴード変換の研究

古典的なエルゴード理論の拡張として、一般の群の測度空間への作用がある。このようなエルゴード理論は、作用から接合積と呼ばれる von Neumann 環が作られることもあり、作用素環との関連を含めて活発に研究されている。特に、このようなエルゴード変換がいかなる測度も保たないとき、接合積として作られる von Neumann 環が III 型という特別なものになるので、私はそのような場合に興味を持って研究を行った。しかし、与えられた作用が実際にいかなる測度も保たないことを示すことや、またいつ作用がエルゴード的(すなわち非自明な部分空間を持たない)になるかを決定することは難しい。

測度空間への群作用を作る統一的な方法の一つに、群のユニタリ表現から測度空間への群作用を作る Gauss 構成というものがある。これは群の有限次元直交表現が与えられた場合には易しく、単に表現空間に Gauss 測度を入れて測度空間と思えば、そこへの表現から与えられる作用を考えたものである。これは実際には直交表現が無限次元でも意味を持たせることができる。このような作用は Gauss 測度を保っている。

私は、磯野氏と Marrakchi 氏とともに、Gauss 構成の亜種として群が実 Hilbert 空間にアファイン等長作用している際と同様の構成について考察した。このような作用は自然な測度を保たない。特に、このような作用をスケールさせたときに、相転移現象が起こることを発見した。

量子群同変 Kasparov 圏の研究

群の C^* -環への作用の研究で重要なものの一つに同変 KK 理論がある。これは安定ホモトピー圏の同変 K 理論における対応物である同変 Kasparov 圏という圏を構成する理論である、この Kasparov 圏はホモトピー論的な側面を持つ一方、対象となる C^* -環が適切な無限性を満たすときには射が本当の環準同型によって代表され、またそれらが同値な射を与える条件を解析的な条件で書けるという著しい性質を持つため、群作用の研究において非常に重要な役割をはたしてきた。

このような同変 Kasparov 圏の構造で重要な定理に、Baum--Connes 予想がある。Baum--Connes 予想はもともと Baum と Connes によって群環の K -群と固有分類空間の K -ホモロジーを関係づけるものとして提唱されたが、Meyer--Nest によると、同変 KK 理論における群作用を有限部分群に制限しても情報が落ちないという形で三角圏の言葉を用いて特徴づけることができ、さらに Meyer--Nest はこのような特徴づけは torsion-free な量子群でも意味を持つことを発見した。私

は, torsion がある場合の量子群に対しても, 同変 Kasparov 圏の分解を与えることにより, 同様に Baum--Connes 予想を定式化し, 先に行われていた具体例の研究がこの意味で Baum--Connes 予想とみなせることを観察した. さらに, このような例を用いて, このような Baum--Connes 予想を満たす量子群の群環が UCT を満たすことも示した.

C*-テンソル圏の研究

C*-テンソル圏とは, テンソル圏であって適切な unitarity を満たすものである. このような C*-テンソル圏は, 主にコンパクト群や量子群の表現圏, また, 下記で詳述する作用素環の包含の表現圏として現れる.

C*-テンソル圏のプロトタイプとして, 群によって次数付けられた有限次元 Hilbert 空間の圏というものがある. これは元の群を復元し, このような意味で C*-テンソル圏は群の拡張だと思えることができる. 私は, Wahl 氏と de Laat 氏とともに C*-テンソル圏上の Fourier 乗算作用素がなす代数である Fourier 代数を導入し, この性質を調べることで, C*-テンソル圏の従順性や性質(T)などの新しい特徴づけを与えた.

テンソル圏の環上の作用とは, 与えられたテンソル圏を与えられた環の双加群として実現する方法のことを指す. これは特にテンソル圏が上述の群によって次数付けられた有限次元ベクトル空間(や Hilbert 空間)のときに, 群の(コサイクル)作用に対応しているという意味で, 群作用の一般化とみなすことができる.

このようなテンソル圏の作用は作用素環における Galois 理論の類似を考えた際に自然に現れる. すなわち, 非可換環の包含があった際に, その表現圏と呼ばれるテンソル圏を構成でき, Galois 群に対応するものとみなすことにする. このような包含は特に環が因子環と呼ばれる von Neumann 環であるときに, 部分因子環論という名前で活発に研究されてきたものであり, 特に超有限 II_1 -因子環と呼ばれる von Neumann 環で, 与えられたテンソル圏が従順という条件を満たすときに, このような表現圏が包含の完全不変量であるというのが, Popa によって示されている. これは表現圏の超有限 II_1 -因子環への作用が本質的にただ一つであるということに言い換えである.

私は C*-環の包含に対して考察を行い, 有限個の既約対象しか持たない C*-テンソル圏(これを C*-フュージョン圏と呼ぶ)の C*-環への作用が Rokhlin 性という性質を満たすときに分類を行った. この結果は特に C*-環が O_2 という特別な C*-環のときには, Rokhlin 性を満たす作用がただ一つである(したがって, このような場合には表現圏が C*-環の包含の完全不変量になっている)ことを示しており, Popa の結果の類似とみなすことができる. このような C*-環の包含の分類ははじめての結果であり, また手法においても泉の有限群の Rokhlin 作用の分類にアイデアを得ており, Popa のものとは全く異なる新しいものである. また, Galois の逆問題に対応するものとして, どんな C*-フュージョン圏も O_2 への Rokhlin 作用を持つことを示した. 論文は現在執筆中である.

また, このような C*-テンソル圏の作用についての KK 理論および Baum--Connes 予想についても考察を行った. 特に, C*-テンソル圏作用に関する KK 理論を定義し, 群の 3-コサイクルツイストからくるようなテンソル圏について, もし群が torsion-free かつ Baum--Connes を満たすなら, その 3-コサイクルツイストも Baum--Connes を満たすことを示した.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yuki Arano, Adam Skalski	4. 巻 149
2. 論文標題 On the Baum-Connes conjecture for discrete quantum groups with torsion and the quantum Rosenberg conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of AMS	6. 最初と最後の頁 5237-5254
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15598	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yuki Arano, Yusuke Isono, Amine Marrakchi	4. 巻 31
2. 論文標題 Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1013-1094
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00039-021-00584-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yuki Arano, Tim de Laat, Jonas Wahl	4. 巻 54
2. 論文標題 The Fourier Algebra of a Rigid C*-Tensor Category	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 393-410
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/54-2-6	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuki Arano, Yosuke Kubota	4. 巻 12
2. 論文標題 A categorical perspective on the Atiyah-Segal completion theorem in KK-theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 779-821
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JNCG/291	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Arano, Kenny De Commer	4. 巻 13
2. 論文標題 Torsion-freeness for fusion rings and tensor C*-categories	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 35-58
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/322	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces
3. 学会等名 Wales MPPM seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 荒野 悠輝
2. 発表標題 Actions of C*-tensor categories on C*-algebras
3. 学会等名 作用素環における対称性と従順性 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 荒野 悠輝
2. 発表標題 Representation theory of quantum doubles
3. 学会等名 数理新人セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y. Arano
2. 発表標題 UCT for discrete quantum groups
3. 学会等名 作用素環論の最近の進展 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Y. Arano
2. 発表標題 UCT for discrete quantum groups
3. 学会等名 Online quantum group seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Y. Arano
2. 発表標題 Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces
3. 学会等名 Wales MPPM Zoom Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 UCT for discrete quantum groups
3. 学会等名 Mini-Workshop: Operator Algebraic Quantum Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 Rokhlin actions of fusion categories
3. 学会等名 Subfactors and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 Rokhlin actions of fusion categories
3. 学会等名 Korean Operator Algebra Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 Rokhlin actions of tensor categories
3. 学会等名 Quantum homogeneous spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 Actions of tensor categories
3. 学会等名 Operator algebras and their applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Arano
2. 発表標題 Introduction to complex quantum groups
3. 学会等名 Recent advances in tensor categories and operator algebras (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------