

令和 5 年 5 月 17 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13427

研究課題名(和文) リサージェンス理論と数理論理学

研究課題名(英文) Resurgence theory and mathematical physics

研究代表者

神本 晋吾 (Kamimoto, Shingo)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・講師

研究者番号：10636260

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Connes-Kreimer Hopf 代数の構造を用いた arborescent mould 展開の手法を用いて、非共鳴条件を満たす非線形常微分方程式の特異点におけるトランス級数解のリサージェンス性に関する結果が得られた。更に、これらの alien 微分など、リサージェンス構造に関する明示的な表示式も得られた。(2) 特異摂動型の Riccati 方程式の形式解について、arborescent mould 展開を用いた解析を行い、各展開係数のリサージェンス性に関する結果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リサージェンス理論とは、微分方程式の形式解などの形式的対象から、Stokes 現象などの解析的情報を引き出すための理論であり、数理論理学や理論物理学において、近年大きな注目を集めている。本研究では、このリサージェンス理論における主要な研究手法の一つである mould 解析の基礎理論に関する成果が得られた。また、この研究手法を、数理論理学において重要な解析手法の一つである WKB 解析へと応用した。

研究成果の概要(英文)：(1) The resurgence of transseries solutions of nonlinear ordinary differential equations at a singular point satisfying a non-resonance condition was shown by an arborescent mould expansion using the Connes-Kreimer Hopf algebra. Further, an explicit description of their resurgence structure was obtained.

(2) Formal solutions of a singularly perturbed Riccati equation were analyzed by an arborescent mould expansion and the resurgence of each coefficient of the expansion was obtained.

研究分野：漸近解析

キーワード：漸近解析 リサージェンス理論 完全WKB解析 Stokes 現象 Borel 総和法 Mould 解析 Connes-Kreimer Hopf 代数 トランス級数解

## 1. 研究開始当初の背景

リサージェンス理論とは、J. Ecalle 氏により創始された Borel 総和法に基づいた解析手法であり、微分方程式の形式解などの形式的対象から、Stokes 現象などの解析的情報を引き出すための理論である。これは、摂動的情報から非摂動的情報を復元するということに対応しており、その理論の有効性から、近年数理論物理学や理論物理学において大きな注目を集めている。しかし、その基礎理論については明らかになっていない部分も多い。特に理論の出発点となる、トランス級数解や WKB 解などの、形式解のリサージェンス性については、重要な未解決問題であった。

## 2. 研究の目的

### (1) 非線形常微分方程式の特異点における形式解のリサージェンス構造の解明

非線形常微分方程式の特異点における Stokes 現象の解析は、漸近解析における古典的な問題ではあるが、その形式解のリサージェンス構造についてはよくわかっていない状況であった。ここで、形式解のリサージェンス構造とは、形式解の Borel 変換像の持つ特異点に関する構造のことであり、Borel 総和法を通して、これらの構造により Stokes 現象の構造の記述が可能となる。リサージェンス構造の解明のためには、大きく分けて、形式解の Borel 変換像の特異点に関する、次の2つの構造が重要となる：

特異点の位置に関する幾何学的構造

特異点での特異性に関する解析的構造

これらの構造の解明のためには、Borel 平面上での精密な解析が必要となるが、方程式のランクが1の場合には、既に mould 解析の手法を用いた結果が知られている。Mould 解析とは、方程式の背後にある組み合わせ論的な構造から、解析的な構造を読み取る解析手法であり、リサージェンス理論における重要な解析手法の1つとなっている。しかし、方程式のランクが2以上の場合には、一般に形式解のリサージェンス構造は極めて複雑なものとなり、その複雑さ故に解析が進んでいない状況であった。本研究の目的は、この mould 解析の手法を発展させ、方程式が2以上の一般の場合にもトランス級数解と呼ばれる形式解のリサージェンス構造に関する明確な記述を与えることである。

### (2) WKB 解のリサージェンス構造の解明

完全 WKB 解析は A. Voros 氏により創始された。これは Borel 総和法に基づいた WKB 解析の手法であり、現在も数理論物理学において重要な解析手法を提供している。WKB 解の Stokes 現象は、主に次の二つに分類される：

Stokes 曲線を超えて解析接続した際に起きる Stokes 現象

Stokes 曲線が退化した際に起きる Stokes 現象

については、Voros により、については Delabaere-Dillinger-Pham により接続公式が与えられている。これらに対応して、WKB 解の Borel 変換像には「動く特異点」と「動かない特異点」と呼ばれる特異点が現れる。これらに関しては、既に多くのことがわかっているが、特異点全体としては、どのように現れるかについては明確な解答が与えられておらず、WKB 解のリサージェンス性は今なお重要な未解決問題のままである。本研究では、この WKB 解のリサージェンス性を示すため、WKB 解の対数微分である Riccati 方程式の形式解のリサージェンス構造について解析を行った。

## 3. 研究の方法

### (1) Arborescent mould 展開を用いた解析

非線形微分方程式の背後にある組み合わせ論的な構造を上手く扱うために、Connes-Kreimer Hopf 代数を用いた arborescent mould 展開により解析を行った。ここで、Connes-Kreimer Hopf 代数とは、場の量子論での繰り込みの手法の組み合わせ論的な構造を記述するために用いられた代数的構造である。このような組み合わせ論的な構造に着目することにより、解の形式的な構造と Borel 平面上での解析的な構造を上手く結びつけることが可能となった。

### (2) 合成積方程式を用いた解析

通常の積は、Borel 変換を通して合成積へと変換される。これにより、微分方程式は合成積方程式へと変換されるが、この合成積方程式を直接解析することにより、形式解のリサージェンス構造の解析を行った。

## 4. 研究成果

### (1) 非線形常微分方程式の特異点におけるトランス級数解のリサージェンス構造について

Arborescent mould 展開の手法を用いて、あるベクトル場の平衡点における Poincare-Dulac 標準形への変換級数のリサージェンス構造の解析を行なった。これにより、非共鳴条件を満たす非線形常微分方程式の特異点における、トランス級数解のリサージェンス構造に関する記述も得られたことになる。より正確には、外線付きの rooted tree によるトランス級数解の展開を用い、alien 微分と呼ばれる、Stokes 係数の対数に対応する量の、反復積分による明示的な記述を得た。また、bridge 方程式と呼ばれる、alien 微分と通常の微分の橋渡しをする関係式の導出も行なった。これらの解析では、Connes-Kreimer Hopf 代数による、方程式の背後にある組み合わせ論的な構造の記述が有効に用いられている。

上記の結果は、Connes-Kreimer Hopf 代数の構造を用いて、解の【形式的】な構造だけでなく、Stokes 現象という【解析的】な構造までも捉えることが可能になったという点で重要である。このように、形式解の構造から解析的な情報を引き出す枠組みを与えるという点が、近年リサージェンス理論が注目されている所以でもあり、この結果の意義は大きいと思われる。べき級数解のリサージェンス性の証明については、

Shingo Kamimoto: Resurgent functions and nonlinear systems of differential and difference equations. Adv. Math. 406 (2022), Paper No. 108533, 28 pp.

に結果をまとめ出版した。Mould 解析によるトランス級数解のリサージェンス構造の解析に関する結果については、既にアナウンスメントは投稿済みであるが、本論文については現在執筆中である。

### (2) WKB 解のリサージェンス構造について

WKB 解のリサージェンス構造の解明のため、その対数微分である Riccati 方程式の形式解のリサージェンス構造について、D. Sauzin 氏と F. Fauvet 氏と共同で研究を行った。ここでも、arborescent mould 展開を用いて解析を行った。これにより、各展開項の反復積分を用いた明示的な表示式が得られ、各項のリサージェンス性については、良い形で結果を得ることができた。しかし、この展開の収束性については、試行錯誤を繰り返したものの示すことができず、完全な解決へと至らなかった。

最終年度では方針を転換し、WKB 解の Stokes 現象から Borel 平面上の特定点の構造を復元するという方向性で考察を進めた。これにより、議論の見通しが良くなり、ポテンシャルが多項式で単純変わり点のみを持つ場合には、この問題解決の糸口が掴めたように思われる。この問題に関しては、今後の課題として残ってしまった。

### (3) 強正則列に関する多重総和可能性に関して

漸近解析の理論自体に関する研究として、強正則列に関する多重総和可能性について、J. Jiménez-Garrido 氏、A. Lastra 氏、J. Sanz 氏と共同研究を行った。強正則列に関する総和法に関しては、既に J. Sanz 氏などにより基本的な結果が示されているが、それらの結果を踏まえて 2 つの強正則列の商に付随した積分変換の核の性質を調べた。また、通常の実数級数への分解を用いた定式化、W. Balser 氏による総和可能な級数への分解を用いた定式化、B. Malgrange 氏と J.-P. Ramis 氏による層を用いた定式化が知られているが、強正則列に関する多重総和可能性に関しても、これらの定式化が同値となることを示した。この研究については、

J. Jiménez-Garrido, S. Kamimoto, A. Lastra and J. Sanz: Multisummability in Carleman ultraholomorphic classes by means of nonzero proximate orders, J. Math. Anal. Appl. 472 (2019), 627-686.

に結果をまとめ出版した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Javier Jimenez-Garrido, Shingo Kamimoto, Alberto Lastra, Javier Sanz	4. 巻 472
2. 論文標題 Multisummability in Carleman ultraholomorphic classes by means of nonzero proximate orders	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 627 ~ 686
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2018.11.043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shingo Kamimoto	4. 巻 1
2. 論文標題 Convolution product and resurgence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Complex Differential and Difference Equations	6. 最初と最後の頁 219 ~ 242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/9783110611427-005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shingo Kamimoto	4. 巻 406
2. 論文標題 Resurgent functions and nonlinear systems of differential and difference equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2022.108533	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 6件/うち国際学会 8件）

1. 発表者名 神本晋吾
2. 発表標題 Mould展開によるStokes現象の解析
3. 学会等名 2021年度函数方程式論サマーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shingo Kamimoto
2. 発表標題 Mould expansion and resurgence
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shingo Kamimoto
2. 発表標題 Connes-Kreimer Hopf algebra and resurgence
3. 学会等名 Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神本晋吾
2. 発表標題 Mould展開を用いたResurgence構造の解析
3. 学会等名 解析学火曜セミナー (東京大学大学院数理科学研究科)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Kamimoto
2. 発表標題 Multisummability for strongly regular sequences
3. 学会等名 Algebraic analysis and Asymptotic analysis in Hokkaido (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Kamimoto
2. 発表標題 Multisummability for strongly regular sequences
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Functional Equations 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Kamimoto
2. 発表標題 Convolution product and resurgence
3. 学会等名 Complex Differential and Difference Equations 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Kamimoto
2. 発表標題 Multisummability and strongly regular sequences
3. 学会等名 Complex Differential and Difference Equations 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Kamimoto
2. 発表標題 Resurgent analysis of differential equations
3. 学会等名 Formal and analytic solutions of functional equations on the complex domain (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Kamimoto
2. 発表標題 On the Borel summability of WKB theoretic transformation series
3. 学会等名 超幾何方程式研究会2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神本晋吾
2. 発表標題 リサージェント関数と合成積
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 神本晋吾
2. 発表標題 Resurgent analysis of differential equations
3. 学会等名 複素領域における微分方程式とその周辺
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------