

令和 5 年 6 月 17 日現在

機関番号：32503

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13428

研究課題名(和文) 超幾何級数の値

研究課題名(英文) Values of Hypergeometric Series

研究代表者

蛭子 彰仁 (EBISU, Akihito)

千葉工業大学・情報科学部・准教授

研究者番号：70772672

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、超幾何関数の値の構造の解明、及びその応用を目標とした。前者の成果として、超幾何関数の比のPade近似、連分数表示およびそれらの誤差評価を行った。後者の成果として、まず差分方程式の不変量を導入した。それを用いて、与えられた線形差分方程式が超幾何関数の値を用いて表されるか検索できるようにした。これにより、次の3つの結果が得られた：(1)超幾何関数の変換公式を組織的に構成した。(2)未解明のFuchs型微分方程式(例えば、Dotsenko-Fateev方程式)の級数解の一般項を構成した。(3)一般化超幾何微分方程式 $3E_2$ の $x=1$ における正則解を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超幾何関数は多くの良い性質を持つが故に様々な分野に現れ、特にその特殊値を用いて多くの量が表されている。得られた成果の内、以下の2点は様々なことに利用されると考えられる。(i)応用上、難しい関数である超幾何関数をよく分かる関数である有理式で近似すること(Pade近似)は重要である。そこで、超幾何関数の比のPade近似およびそれらの誤差評価を行った。(ii)多くの現象が線形差分方程式を用いて記述される。今回導入した差分方程式の不変量により、与えられた線形差分方程式が超幾何関数の値を用いて表されるか検索できるようになった。これにより、差分方程式を用いて記述される現象の解明が期待出来るようになった。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research was to investigate values of hypergeometric functions. The followings are our results:

(1) We construct some Pade approximations for ratios of Gauss's hypergeometric functions. Using these, continued fraction expansions for those ratios are obtained. Also, truncation errors of the n -th approximant for those continued fraction expansions are given.
 (2) We introduce invariants of linear difference equations. Using these, we can search whether a given linear difference equation has solutions expressed in terms of hypergeometric functions or not. Applying this method, we got the followings:(i) Algebraic transformation formulas for Gauss's hypergeometric functions and Appell's hypergeometric functions are systematically obtained. (ii) Series solutions of unsolved Fuchsian differential equations(e.g. Dotsenko-Fateev equation) are constructed. (iii) Series expansions of holomorphic solutions at unit argument of the generalized hypergeometric equation $3E_2$ are constructed.

研究分野：特殊関数

キーワード：超幾何関数 差分方程式の不変量 Pade近似 隣接関係式 変換公式 特殊値 Dotsenko-Fateev方程式 連分数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

超幾何関数は多くの良い性質を持つが故に、様々な分野(数学の諸分野・物理学・統計学・工学等)に現れ、ある種の周期・物理量・統計量を始めとした多くの量が超幾何関数の値として表される。もしこれらの値が良く知られた定数や関数を用いて表されたのなら申し分無いのだが、大抵の場合そうはならない。つまり、ある特別な超幾何関数に対しては特殊値公式が存在するのだが、大抵の超幾何関数の値は良く知られた定数や関数では表せないのである。そのため、現象が超幾何関数の値を使って記述される場合に実際に解析する際は、その数値計算が行われている。

2. 研究の目的

様々な量が超幾何関数の値として表されている以上、何らかの意味で値を理解していく必要がある。それができたのなら、超幾何関数の効率的な数値計算にも応用できるだろう。以上を考察していくことにより、超幾何関数の値そのものの理解を深めていくことが目的である。

3. 研究の方法

関数、およびその値を研究する上で良く使われる手法は微分である。しかしながら、これは計算機との相性が悪いことから、本研究では差分を使うこととした。調査対象である超幾何関数の持つ顕著な性質として、「隣接関係式」が成り立つことが挙げられる。これは、パラメータが整数差ずれた複数の超幾何関数の間に成り立つ線形関係式のことである。この隣接関係式から超幾何関数のパラメータに関する差分方程式が得られる。こうして、知りたい超幾何関数について、それとパラメータが整数差ずれた複数の超幾何関数の性質が事前に分かったのなら、元々の関数の性質が分かることになる。以上の観察のもと本研究では、差分、またより広く、隣接関係式を用いて超幾何関数の値の研究を行った。

4. 研究成果

先述の通り、超幾何関数は特別な場合を除き特殊値公式が成り立たず、そのために何らかの意味で値を理解していく必要がある。1つの考え方として、超幾何関数を別の超幾何関数で表すこと(超幾何関数の変換公式)が考えられる。もしその別の超幾何関数の構造が予め分かっていたのなら、元々の関数の構造も分かるからである。本研究では、**超幾何関数の変換公式を組織的に構成する方法の開発**((1) 参照)、およびその基礎付けである**差分方程式の不変量の導入**((1)参照)を行った。更に、それらの応用として、**Dotsenko-Fateev方程式を始めとした未知のFuchs型方程式の級数解の構成**((1) 参照)、**一般化超幾何微分方程式 $3E_2(x)$ の $x=1$ における級数解の構成**((1) 参照)を行った。また、隣接関係式について深く解析することで、**Gaussの超幾何関数の比のPade近似、連分数表示、誤差評価**((2)参照)についても得ることができた。

(1) 差分方程式の不変量の導入とその応用

様々な現象が線形差分方程式を用いて記述される。しかし、数ある線形差分方程式を個別に解

くことは非現実的であるし、そもそも解けないことも多い。そこで、線形差分方程式達を類別することを考える。2つの差分方程式の解空間が1階線型差分方程式の解 Q によって結ばれるとき、それら2つの差分方程式を同じものと見做すことにする。このように差分方程式全体を類別したときに同値類を特徴付ける値が差分方程式の不変量である。さらに、2つの差分方程式の不変量が一致するときに、それらの解空間を結ぶ Q も具体的に記述できることが分かる。こうして線形差分方程式の類別ができ、応用として以下の3つが得られた。

超幾何関数の変換公式を組織的に構成する方法の開発

超幾何関数の値を理解するための1つの方法に変換公式があった。変換公式から値を理解することで、例えば、Gauss-Legendre のアルゴリズムという円周率の数値計算法が開発されている。そこで、本研究では、そのような応用を見据え、変換公式を組織的に構成する方法を開発した。先述の通り、超幾何関数はパラメータに関する線形差分方程式(隣接関係式由来の差分方程式)を満たす。そこで、2つの超幾何関数に対し、それぞれから導かれる線形差分方程式の不変量を計算し、それらが一致するよう(超幾何関数の)パラメータ、独立変数を調整することを考える。この操作は連立代数方程式系を解くことに他ならず、Groebner 基底を用いることにより計算機上で可能である。もしそのようなパラメータを見つけることができたのなら、超幾何関数(の満たす差分方程式の解空間)同士を結ぶ関数 Q も得られることになり、ここから超幾何関数の変換公式が導出されることになる。この方法により、変換公式の組織的な構成が可能となった。実際、既知の Gauss の超幾何関数の変換公式を全て導出することに成功し、またほとんど知られていなかった Appel I の超幾何関数の変換公式についても幾つか(新規も含む)導出することに成功した。

Dotsenko-Fateev 方程式を始めとした未知の Fuchs 型方程式の級数解の構成

Fuchs 型方程式の級数解の係数は線形差分方程式を満たすが、その差分方程式は Fuchs 型方程式から構成できることが知られている。つまり、与えられた Fuchs 型方程式の級数解が未知であっても、その係数の満たす差分方程式の不変量は計算可能である。従って、その不変量と隣接関係式由来の差分方程式の不変量とが一致するようであれば、未知の Fuchs 型方程式に対し、超幾何関数の値を係数に持つような級数解が構成できることになる。この方針で、Dotsenko-Fateev 方程式(3階、3点特異点を持つ)に対し、9つの級数解を構成し、またそれらの変換公式も導いた。更に、これらの級数解に着目することで、Dotsenko-Fateev 方程式と Gauss の超幾何微分方程式のテンソル積とが middle convolution という操作で移り合うことを発見した(原岡喜重・金子昌信、落合啓之、佐々木武、吉田正章との共同研究)。

一般化超幾何微分方程式 $3E_2(x)$ の $x=1$ における級数解の構成

一般化超幾何微分方程式 $3E_2(x)$ は特異点 $x=0, 1$ を持つ Fuchs 型微分方程式である。この $x=0$ における局所解は、一般化超幾何関数 $3F_2(x)$ を用いて表されることが容易にわかる。一方、 $x=1$ における局所解、特に $x=1$ における正則解の級数表示を得ることは難しい。実際、先行研究で得られた表示は、級数の一般項が超幾何関数の特殊値 $3F_2(1)$ を用いて表されるものであった。これは超越的表示であり、知りたいものをよく分からない値を使って表している面がある。そこで、 $x=1$ における正則級数解の成す空間の基底を上手く取り、それら基底の一般項が有理的となるものを構成した。この構成には、差分方程式の不変量や隣接関係式の性質といったこれまでの知見が用いられている。

(2) Gauss の超幾何関数の比の Pade 近似、連分数表示、誤差評価

応用上、超幾何関数の近似値を求めることは重要である。そのために、超幾何関数の(比の)

「良い」近似であるPade近似(有理関数による近似)が古くから考察されてきた。ただし、まとまった文献はこれまでなかったため、隣接関係式の性質を用いて、超幾何関数(の比)のPade近似を系統的に導出した。これにより、例えば、第一種と第二種完全楕円積分の比のPade近似も得られる。更にPade近似から、超幾何関数の比の連分数表示や、その誤差評価も導かれる。これらの結果は既知なものばかりでなく、新規なものも含まれる。特に、Pade近似を用いた超越数論への応用については、川島誠と共同で研究を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Akihito Ebisu and Katsunori Iwasaki	4. 巻 463
2. 論文標題 Three-term relations for $3F_2(1)$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 593-610
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2018.03.034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Akihito Ebisu and Katsunori Iwasaki	4. 巻 49
2. 論文標題 Contiguous relations, Laplace's methods, and continued fractions for $3F_2(1)$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 159-213
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11139-018-0039-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Akihito Ebisu and Yoshishige Haraoka and Msanobu Kaneko and Hiroyuki Ochiai and Takeshi Sasaki and Masaaki Yoshida	4. 巻 60
2. 論文標題 A study of a Fuchsian system of rank 8 in 3 variables and the ordinary differential equations as its restrictions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 153-206
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/89997	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 蛭子彰仁	4. 巻 B91
2. 論文標題 一般化超幾何微分方程式 $3E_2$ の $x=1$ における正則解	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録別冊	6. 最初と最後の頁 45-68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Akihito Ebisu
2. 発表標題 Identities for hypergeometric functions: from the view point of contiguous relations
3. 学会等名 Darfセミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 超幾何関数の変換公式について
3. 学会等名 特殊多様体・特殊関数研究会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 蛭子 彰仁
2. 発表標題 一般超幾何微分方程式 $3E_2$ の $x=1$ における正則解
3. 学会等名 2021年度函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 蛭子 彰仁
2. 発表標題 一般超幾何微分方程式 $3E_2$ の $x=1$ における正則解
3. 学会等名 可積分系数理の諸相（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 超幾何関数と差分方程式
3. 学会等名 日本数学会年会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 蛭子 彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量とその応用
3. 学会等名 千葉大学解析セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蛭子 彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量とその応用
3. 学会等名 広島複素解析セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihito Ebisu
2. 発表標題 Invariants of difference equations and transformation formulae for hypergeometric functions
3. 学会等名 15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蛭子 彰仁
2. 発表標題 Dotsenko-Fateev 方程式の解について
3. 学会等名 2019年度函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihito Ebisu
2. 発表標題 Invariants of difference equations and transformation formulae for hypergeometric functions
3. 学会等名 仙台ワークショップ「Hypergeometric Series, Mahler Measures, and Multiple Zeta Values」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihito Ebisu
2. 発表標題 Invariants of difference equations and transformation formulae for hypergeometric functions
3. 学会等名 Differential systems: from theory to computer mathematics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 超幾何関数の変換公式について
3. 学会等名 2018年度函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量と超幾何関数の変換公式
3. 学会等名 第61回函数論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量と超幾何関数の変換公式
3. 学会等名 第17回北海道特殊関数セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量とその応用
3. 学会等名 近畿大学数学教室講演会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量とその応用
3. 学会等名 アクセサリー・パラメーター研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 蛭子彰仁
2. 発表標題 差分方程式の不変量と超幾何関数の変換公式
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>The Web Page of Akihito Ebisu https://sites.google.com/site/akihitoebisu/home</p>

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------