

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13430

研究課題名（和文）相を分ける界面モデルに対する確率解析とその発展

研究課題名（英文）Stochastic analysis for interface models separating phases and its evolution

研究代表者

横山 聡 (YOKOYAMA, Satoshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員

研究者番号：70643774

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：性質の異なる2つの物質を分ける界面に、確率的要素であるノイズが含まれた方程式の時間発展を表す数学的モデルを主に研究対象とした。ノイズは物理的に自然と考えられる時空ホワイトノイズが理想であるが、研究では空間的に相関がある色付きノイズで問題を捉えノイズで駆動される界面の時間発展を議論した。具体的には界面からの符号付き距離関数が満たす方程式として乗法的ノイズ付きの準線形2階確率偏微分方程式が導かれる。ノイズが持つ正則性の悪さから起因する技術的困難のため、色付きノイズにかかる係数が上記の符号付き距離関数の値に応じて適度に変換される条件が必要であるが、局所解の存在と一意性が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率項が付加された双安定で均衡条件を満たす反応項を持つ反応拡散方程式で、低温状態にするような極限操作では反応項の影響が強くなり2相を分ける界面の運動が現れる。界面の形状の時間発展を議論する事は重要である。2次元の空間での体積保存型の確率アレンカーン方程式では適切な条件のもと極限操作によって界面の時間発展を表す具体的な方程式が導かれるという結果を得た。また、2次元の空間で適切な条件を課した色付きノイズの場合の界面の運動も議論できた。数学的に議論を進めるための技術的な仮定の元、できる限り自然と思われるノイズを導入し確率偏微分方程式としてモデル化し、界面の運動の結果を得たことは意義深い。

研究成果の概要（英文）：The main subject of the study was a mathematical model that represents the time evolution of an equation with a stochastic element, noise, on the hypersurface that separates two materials with different properties. Ideally, the noise should be space-time white noise, which is considered physically natural, but in this study, the problem was captured with spatially correlated colored noise and the time evolution of the hypersurface driven by the noise was discussed. Specifically, a quasilinear second-order stochastic partial differential equation with multiplicative noise is derived as the equation satisfied by the signed distance function from the hypersurface. Due to technical difficulties arising from the poor regularity of the noise, the existence and uniqueness of local solutions are obtained, although conditions are required under which the coefficients on the colored noise are moderately transformed according to the value of the signed distance function above.

研究分野：確率論

キーワード：確率偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

水と氷などの異なる2つの物質を分ける相の境界、すなわち界面の形状がどのように時間発展し最終的にどのような形に変化していくかを数学的にモデル化し厳密に扱うことは非常に意義深い。界面の運動はその境界面に対して、相のどちらから見るかによるが内向き法線方向の単位ベクトルを用いた成長速度と呼ばれるベクトルが満たす微分方程式の解として記述される。界面の変化率がその平均曲率に従って運動する場合は平均曲率方程式として知られており偏微分方程式の分野で多く研究されている。様々な不確定要素を考慮する場合はランダムな要素をもつ確率偏微分方程式としてモデル化し解析することが有効である。外力が決定的な場合のモデルについては、系を記述する方程式の導出とその解の構成について厳密に議論がなされている。異なる時間、異なる場所で発生するノイズは相関関係がなく独立に発生し、時空ホワイトノイズを採用することが物理的に自然であるが、対応する方程式によっては解の構成に数学的な困難が存在する。出来る限り物理的に自然なノイズによって確率偏微分方程式として問題を定式化し、数学的に可解性を示すことは応用上も必要である。このような背景の下、本研究では界面を表す方程式にノイズを取り入れ確率偏微分方程式としてモデル化しランダムな界面の時間発展を追跡する。

2. 研究の目的

性質の異なる2相を分ける界面に対して、系が安定ではない非平衡状態の場合2つのそれぞれの物質が持つエネルギーの時間変化、あるいは外部からのエネルギーの注入あるいは吸収により時間の経過につれて界面の移動が発生する。本研究はこのような界面の移動を記述するモデルとして知られる偏微分方程式に、確率的な要素であるランダムな力(ノイズ)として予期せぬ要因で起こる揺らぎを数学的に捉えノイズの影響を考慮した確率偏微分方程式の枠組みでより現実的なモデルとして定式化しその解析を行う。実際に観測される現象ではノイズの影響は観測時刻、観測地点、観測方法などにより多岐に渡ると考えられるが、できる限り自然と思われる仮定をノイズに与え、対応する界面の挙動の厳密な解析を目指す。

3. 研究の方法

本研究では偏微分方程式にできる限り物理的により自然と思われる時空それぞれに依存するノイズを付加した確率偏微分方程式を採用し基本的道具として扱う。反応項を双安定で均衡条件を満たす非線形関数とした反応拡散方程式であるアレクサンダー方程式の極限移行からは平均曲率流が表れる。ノイズの影響を考慮した平均曲率流の解の構成はノイズの正則性の悪さが起因して証明は容易ではない。確率偏微分方程式にモデルを拡張するために、偏微分方程式における極限移行の分野についての有識者である海外研究者との意見交換、また特異な確率偏微分方程式の情報収集のために出張を実施した。

4. 研究成果

・ 発表論文

Yokoyama Satoshi, A stochastically perturbed mean curvature flow by colored noise, *J. Theoret. Probab.* **34** (2021), 214--240.

Funaki Tadahisa and Yokoyama Satoshi, Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation, *Ann. Probab.* **47** (2019), 560--612.

・ 発表

Three different time stages in stochastic mass-conserving Allen-Cahn equation, Hydrodynamic limit and related topics, 早稲田大学, 2019年12月.

Three different time stages in stochastic mass-conserving Allen-Cahn equation, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, Osaka, 研究会「第18回大規模相互作用系の確率解析」, 大阪大学, 2019年11月.

Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation, AIMS 2018, Seminar Probabilités-Statistiques-Contrôle, ENSTA ParisTech, フランス, 2019

年2月.

Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation,
AIMS 2018, National Taiwan University, 台北, 2018年7月.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yokoyama Satoshi	4. 巻 34
2. 論文標題 A Stochastically Perturbed Mean Curvature Flow by Colored Noise	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 214 ~ 240
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-019-00983-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Funaki Tadahisa, Yokoyama Satoshi	4. 巻 47
2. 論文標題 Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Annals of Probability	6. 最初と最後の頁 560 ~ 612
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/18-AOP1268	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Satoshi Yokoyama
2. 発表標題 Three different time stages in stochastic mass-conserving Allen-Cahn equation
3. 学会等名 大規模相互作用系の確率解析
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Satoshi Yokoyama
2. 発表標題 Three different time stages in stochastic mass-conserving Allen-Cahn equation
3. 学会等名 One-day Symposium 「Hydrodynamic limit and related topics」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Satoshi YOKOYAMA
2. 発表標題 Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Satoshi YOKOYAMA
2. 発表標題 Sharp interface limit for stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation
3. 学会等名 Seminar Probabilites-Statistique-Controle, Ensta, ParisTech.
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関