様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　5 年　6 月　4 日現在

機関番号：34316

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13432

研究課題名（和文）微分対称性破れ作用素および極小表現の解析学的研究

研究課題名（英文）The study of differential symmetry breaking operators and minimal representations from an analytic point of view

研究代表者

久保　利久（Kubo, Toshihisa）

龍谷大学・経済学部・准教授

研究者番号：90647637

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：研究期間中は主にA2型ハイゼンベルグ超双極型微分作用素□(s,3)の解空間Sol(□(s,3))のK-type構造について研究した．その結果，そのK-type構造を完全に決定できただけでなく，以下に述べる多項式列に関する新しい知見(1)，(2)，(3)を得ることにも成功した：(1) 局所ホイン関数をsinh型，cosh型の母関数として持つ多項式列の発見，(2) 三重対角行列式の特殊値 (factorial identity) の発見，(3) 多項式列の関数等式 (palindromic property) の発見．本研究で得られた経験，知見を今後の研究に大いに活かしていく所存である．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究成果の主な学術的意義として，Kableの問題の部分的解決が挙げられる．An型ハイゼンベルグ超双極型微分作用素□(s,n+1)の解空間Sol(□(s,n+1))のK-type構造はKableによって調べられているが，その構造を完全に記述するまでには至っていない．本研究では解空間Sol(□(s,3))のK-type構造を完全に決定することにより，n=2の場合にこの問題を解決することができた．さらに本研究によって「多項式列の関数等式」という全く新しい性質を発見することにも成功した．これは古典的によく知られた三重対角行列式に対しても新たな性質を見出すものである．

研究成果の概要（英文）：During the period of research, I mainly studied the K-type structure of the solution space Sol(□(s,3)) of the Heisenberg ultrahyperbolic operator □(s,3) of type A2. There are two main results. One of them is the determination of the K-type structure of Sol(□(s,3)). This result closes a case of the problem that Kable studied before. The other is the the following three discoveries on sequences of polynomials: (1) the discovery of sequences of polynomials that has local Huen functions as their generating functions of sinh type and cosh type, (2) the discovery of the special values of the tridiagonal determinants, and (3) the discovery of the functional equation (palindromic property) of sequences of polynomials. I will use the experience and knowledge obtained in this study for my future research.

研究分野：実簡約群の表現論

キーワード：絡微分作用素　極小表現　K-type構造　超幾何多項式　Heun多項式　三重対角行列式　Cayley continuant　関数等式

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

本研究計画は，研究代表者が研究計画策定時までに行なっていた以下の二つの研究を主な研究背景としている．

研究(1)：球面上の微分形式間における微分対称性破れ作用素の分類およびその具体的構成

研究(2)：SL(3,R)-絡微分作用用素□(0,3)の解空間 Sol(□(0,3))（=Ker□(0,3))上への極小表現の実現

（なお，研究(2)では本来ならば SL(3,R)の普遍被覆群を考えるが，記号が煩雑になることを避けるために，本報告書では単に SL(3,R)として記述する．）

上記の研究(1),(2)を踏まえ，本研究では以下の二つの問題 A,B に取り組むことにした．

問題 A：微分対称性破れ作用素を用いた補系列表現の埋め込みの具体的構成

問題 B：解空間 Sol(□(0,3))上に実現された極小表現のユニタリ内積の具体的構成

研究開始当初，問題 B の研究に取り掛かっていたが，研究を押し進める中で残念ながら問題 A，B ともに既に他の研究者達によってほぼ解決していることが判明した．そこで研究(2)の内容をより一般的に捉えられる以下の問題 C を新たに本研究課題と位置づけ，研究を行うことにした．

問題 C： A2 型ハイゼンベルグ超双極型微分作用用素□(s,3)の解空間 Sol(□(s,3))の K-type 構造の決定

以下，実質的に取り組んだ問題 C について，その研究背景を述べる．

An 型ハイゼンベルグ超双極型微分作用用素□(s,n+1)は，2012 年に Kable によって導入された複素パラメータを１つ持つ SL(n+1,R)-絡微分作用用素である．そして，解空間 Sol(□(s,n+1))（=Ker□(s,n+1))はその絡微分作用素性から自然に SL(n+1,R)の表現空間となる（なお，ここで□(s,n+1)における｢s｣は，その複素パラメータを表す)．上述の論文で Kable は，解空間 Sol(□(s,n+1))の K-type 構造の決定を試みたが，得られた結果は部分的なものに留まり，K-type 構造そのものを決定するまでには至らなかった．一方，研究(2)として研究代表者が行なっていた研究は，まさに(s,n+1)=(0,3)の場合に，Sol(□(0,3))の K-type 構造を決定したものであった．それゆえ，その研究で培った手法などを用いれば，(s,n+1)=(s,3)の場合に Sol(s,3)の K-type 構造を決定できるのではないかと考え，問題 C に取り組むことにした．

２．研究の目的

本研究は以下の二点を主な研究目的としている．

目的(1)： A2 型ハイゼンベルグ超双極型微分作用用素□(s,3)の解空間 Sol(□(s,3))の K-type 構造の決定

目的(2)：Sol(□(0,3))の K-type 構造を調べる際に得られた超幾何多項式と K-type 構造の関係の一般化

特に目的(1)は，Kable が 2012 年の論文で取り組んだ問題の部分的解決を意味する．

３．研究の方法

本研究では，Sol(□(0,3))についての研究を踏まえ，Peter-Weyl 型分解定理と微分方程式を組み合わせる方法を用いた．これは微分方程式を使う点において，Kable が解空間 Sol(□(s,n+1))の K-type 構造を調べる上で用いた代数的な手法とは異なるものである．

まず，本研究の研究対象となっている A2 型ハイゼンベルグ超双極型微分作用素は SL(3,R)-絡微分作用素であるため, Sol(□(s,3))の K-type は全て多項式の空間で実現される. したがって, 微分作用素□(s,3)から定まる各 K-type 上の微分方程式がいつ多項式解を持つかということを決定できれば，Sol(□(s,3))の K-type 構造を詳細に調べることができる.

当初，K-type 上の微分方程式として超幾何微分方程式が得られるものと期待し研究を進めていたが，実際に得られたものは「Heun 微分方程式」と呼ばれるもので，特にいつ多項式解を持つか分からないものであった. この問題を解決する方法はなかなか見つからず，実際 Kable と同じ代数的な手法に切り替えることも検討し，いくつか関連する計算も行った．しかし，最終的には田森宥好氏の研究から，K-type 上の微分方程式としての実現は一意でないことに気づき，その実現自体を変えることによって超幾何微分方程式を得ることに成功した．なお，Huen 微分方程式と超幾何微分方程式という異なる二つの実現は，これまで発見されてこなかったと思われる多項式列に関する新しい性質を発見することにもつながった．これについては下記【研究成果】で述べる.

４．研究成果

研究期間全体を通じて実施した研究の主な成果として次の二点を挙げる.

第一の成果は，A2 型ハイゼンベルグ超双極型微分作用素□(s,3)の解空間 Sol(□(s,3))の K-type 構造を完全に決定できたことである．記号が煩雑になることを避けるために，上記では単に SL(3,R)として記述しているが，実際にはその普遍被覆群まで含めて研究を行った．上記の Kable の論文では，線形群 SL(n+1,R)しか考えられていない．したがって，今回の研究成果により， Sol(□(s,n+1))の K-type 構造における Kable の問題を n=2 の場合に単に解決しただけでなく，普遍被覆群まで含めてより完璧な形で解決することができた.

第二の成果は，多項式列に関する新しい性質の発見である．本研究では，一つの微分方程式を Huen 微分方程式と超幾何微分方程式の二つの微分方程式で表すことが重要な役割を果たした. 特に Huen 微分方程式を超幾何微分方程式で表すことにより，本研究に関する特別なパラメータにおいて，いつ Huen 微分方程式が多項式解を持つか決定できた．このことから，以下に述べる多項式列に関する三つの新しい知見(a),(b),(c)を得た.

知見(a): 局所ホイン関数を sinh 型，cosh 型の母関数として持つ多項式列の発見

知見(b): 三重対角行列式の特殊値 (factorial identity) の発見

知見(c): 多項式列の関数等式 (palindromic property) の発見

知見(a)のように，sinh 型，cosh 型の母関数を持つような多項式列が発見されたのは，本研究が初めてではないかと考えている．知見(b)は，従来から古典的に知られていた Sylvester determinant における因数分解公式や、Kable が 2012 年の論文で得ていたものを含むものであり, 本研究ではさらにそれらを知見(c)という形として深化させることに成功した. 知見(c)のような多項式列の関数等式が発見されたのも，本研究が初めてではないかと考えている.

本研究は，n=2 の場合に焦点をあてて取り組んだものである．今後，n≧3 の場合について引き続き研究を行い，上記の結果がどのように一般化されるのか考えていきたい.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Toshihisa Kubo
２．発表標題 On the classification of the K-type formulas for the Heisenberg ultrahyperbolic equation
３．学会等名 Lie Group and Representation Theory Seminar
４．発表年 2021年

１．発表者名 Toshihisa Kubo
２．発表標題 On the classification of the K-type formulas for the Heisenberg ultrahyperbolic equation
３．学会等名 Representation Theory Workshop 2021
４．発表年 2022年

１．発表者名 Toshihisa Kubo
２．発表標題 Palindromic property of a sequence of polynomials
３．学会等名 Representation Theory Workshop
４．発表年 2021年

１．発表者名 Toshihisa Kubo
２．発表標題 Classification of the K-type formulas for a certain second order differential equation
３．学会等名 Langlands and Harmonic Analysis
４．発表年 2021年

１．発表者名
Toshihisa Kubo

２．発表標題
Palindromic property of Cayley continuants {Cay_k(x;n)}

３．学会等名
MSJ Spring Meeting 2021

４．発表年
2021年

１．発表者名
Toshihisa Kubo

２．発表標題
Kable's Heisenberg ultrahyperbolic operator and hypergeometric polynomials

３．学会等名
Second International Conference on Applications of Mathematics to Nonlinear Sciences (AMNS-2019), Nepal（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Toshihisa Kubo

２．発表標題
Factorization formulas for certain tridiagonal determinants

３．学会等名
Ryukoku seminar

４．発表年
2019年

１．発表者名
Toshihisa Kubo

２．発表標題
Sylvester-type determinant formulas and Huen polynomials

３．学会等名
Seminar in Kyushu University

４．発表年
2019年

1．発表者名
Toshihisa Kubo

2．発表標題
On the zeros of the Sylvester determinant and Jacobi weight function

3．学会等名
Representation theory workshop 2020

4．発表年
2020年

1．発表者名
Toshihisa Kubo

2．発表標題
A Peter-Weyl type decomposition theorem for intertwining differential operators and its application

3．学会等名
Seminar in Aarhus University, Denmark

4．発表年
2020年

1．発表者名
Toshihisa Kubo

2．発表標題
The K-type formulas for Kable's differential operators of type A_3 and Heun polynomials

3．学会等名
MSJ Spring Meeting 2020

4．発表年
2020年

1．発表者名
久保　利久

2．発表標題
On the Peter-Weyl type decomposition theorem for the space of K-finite solutions to intertwining differential operators

3．学会等名
日本数学会2019年度年会

4．発表年
2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人Webページ https://sites.google.com/site/toskubo00/

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関