

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：25101

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13436

研究課題名（和文）準線形偏微分方程式とその自由境界問題に対する粘性解理論及びその応用

研究課題名（英文）Viscosity solution theory for quasilinear PDEs, free boundary problems and their applications

研究代表者

小杉 卓裕（Kosugi, Takahiro）

公立鳥取環境大学・人間形成教育センター・講師

研究者番号：80816215

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：粘性解は2階の楕円型・放物型方程式に対する適切な弱解であり、特に(確率)最適制御や微分ゲームから現れる方程式を考えた際に自然に現れるためよく研究されている分野の一つである。障害物問題は最適停止問題に現れる応用上重要な方程式であり、数値計算をする際はそのままでは扱えないためしばしばペナルティ法による近似方程式をたてる。その解が元の障害物問題の粘性解に収束していくときの速さを調べた。また、完全非線形版藤田型方程式系の時間大域解の存在のための十分条件を考察した。藤田型方程式は放物型方程式の分野で非常に多く研究されてるものの一つであり、それを完全非線形に拡張した方程式を考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

粘性解理論は準線形方程式に対する正則性など発散型方程式の弱解に比べて未知な部分が少なくないため、準線形方程式を粘性解で扱うことで粘性解理論の可能性を広げる価値がある。数値計算を行う際は一旦離散化の必要があるが、収束の速さがわかることで離散化のサイズを決定できる可能性がある。藤田型方程式は濃度により反応速度が変わる化学反応などを表すとされているが、その完全非線形化は分枝過程と関連づく可能性がある。

研究成果の概要（英文）：Viscosity solution is a notion of weak solutions for second-order elliptic and parabolic equations and is one of the most studied fields, especially when considering (stochastic) optimal control and equations arising from differential games. The obstacle problem is an important equation in applications that appears in the optimal stopping problem, and since it cannot be handled as is in numerical calculations, an approximate equation is often constructed via penalization. The rate of convergence of the solution to the viscosity solution of the original obstacle problem is investigated. Sufficient conditions for the existence of global-in-time solutions of a weakly coupled system of fully nonlinear Fujita equations are also considered. The Fujita equation is one of the most studied in the field of parabolic equations, and we extend it to a fully nonlinear system.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：粘性解 完全非線形方程式 準線形方程式 正則性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 粘性解は1989年代初頭に導入された(退化)楕円型・放物型偏微分方程式に対する弱解の概念で、粘性消滅法から自然に導かれる解の候補がみたす性質を定義として採用されたものである一方、動的計画原理からも適切な定義であることが明らかになっている。発散型方程式に対する超関数の意味での弱解では扱えない非発散型を含む完全非線形方程式を扱うため、微分幾何学や(確率)最適制御理論、確率微分ゲーム等に応用を含め非常に多くの研究がなされている。しかし、 p -ラプラシアンのように1階微分が2階項の係数に含まれるような準線形に対する研究は少なく、研究の端緒が開いたばかりである。

(2) 障害物問題は最適停止問題に、勾配拘束問題は特異制御問題に現れる応用上重要な方程式であり、これらの解はその大きさや勾配に関する条件に引っかかるとき方程式をみたさなくなるため、ある意味領域内部に境界が発生するという意味で自由境界問題と呼ばれる。また、障害物問題や勾配拘束問題はベルマン方程式やアイザックス方程式で表される非発散型方程式である。

(3) これら準線形方程式やその自由境界問題に対して粘性解による解析を行い、道具としての粘性解理論の整備を進展させることが求められる。

2. 研究の目的

粘性解理論において、比較原理は解の一意性を導くという意味で解の適切性の中核をなす重要なテーマである。また、粘性解は“本物の解”の候補であるのでその近さを表す正則性は自然と気になる問題である。本研究では上述した準線形方程式や自由境界問題を含む完全非線形方程式を念頭に、適切性や正則性、あるいはそれらを用いることを目的とする。

3. 研究の方法

Bernstein法によるアプリオリ評価や二重変数法などこれまでの粘性解理論に加え、非線形随伴法のような新しい技術を取り入れる。

4. 研究成果

(1) 2種の自由境界問題である障害物問題と勾配拘束問題の同値性を得た。より具体的には、勾配拘束問題と、その勾配拘束条件から決まる障害物をもつ両側障害物問題について、それらの一意粘性解が一致することを示した。本問題は1971年にBrezis-Sibonyが変分問題において証明したのが最初であるが、変分問題であるがゆえに方程式部分は発散型に限られていた。本結果は粘性解の枠組みで扱っているため完全非線形楕円型も含むという意味で先行研究より広いクラスで示しているといえる。特に、1階の方程式など完全に退化する場合も含む。その証明は、勾配拘束条件から障害物を構成することと、障害物問題の解のLipschitz定数を評価することが重要である。勾配拘束問題はその具体例から一般に解をもたないことがあるため劣解の存在を仮定することは自然である。その劣解は勾配拘束条件からeikonal方程式の劣解となるためLipschitz定数は1である。この劣解を障害物問題の下側の障害物ととる。また、勾配拘束条件を一つの方程式(eikonal方程式)としてみなし、その解を上側の障害物として設定する。この設定の下で障害物問題のLipschitz定数の評価を用いると、障害物問題の解が勾配拘束問題の解となる。逆に、上・下の障害物は障害物問題の優解・劣解なのでいつでも障害物問題の解が存在するが、勾配拘束問題の解が障害物問題の解とならないとすると一意性に反する。本証明において一般的に明らかでない勾配拘束問題の一意性が重要な性質となるのでいくつかの条件の下で比較原理を示したが、特異 p -Laplacianを含む完全非線形の勾配拘束問題に対するF-解の比較原理を初めて示した。このF-解は放物型の場合にOhnuma-Sato(1997)やIshii-Souganidis(1995)で導入されたテスト関数を制限した粘性解の概念であるが、本結果において初めて楕円型方程式に対して導入された。

一般に勾配拘束問題は障害物問題よりも解析が難しいが、本結果により障害物問題を解析することに帰着できる。実際、本研究は元々別の問題で勾配拘束問題を扱うために考えたものである。本結果で扱っている方程式は退化する場合を考えているためLipschitz定数の評価は0階項の係数が重要であったが、退化しない場合であれば一様楕円性を用いてLipschitz評価を厳密に行うことでより広いクラスで示せる可能性がある。

(2) 半線形放物型方程式である藤田型方程式の藤田指数(正值時間大域解の存在可能性を分ける非線形項の臨界指数)の研究は非常に有名である。この藤田型方程式の完全非線形版の弱結合による2本の方程式系に対して、時間大域解の存在を示した。本結果ではまず時間局所解の存在を示した。時間局所解の存在を示す際にはPerronの方法を用いることを念頭に劣解と優解の存在を示すのであるが、非線形項なしのPucci方程式の解を生成する半群を考え、その半群を用いて通常半線形藤田型方程式の場合のように積分方程式を考える。その解を縮小写像の原理

を用いて示し、それらが実際に元の偏微分方程式系の劣解、優解になることを示すことで、元の方程式の時間局所解の存在を示した。また、比較原理も示し解が一意的であることも示した。その後、ある指数の条件に対して対応する固有値問題（前方自己相似解を探す際に現れる方程式）の固有値、固有函数を用いて時間大域的な優解を構成し正值時間大域解の存在を示した。

完全非線形では減衰レートが真に線形の場合と変わることが知られている。藤田指数は、拡散効果からくる減衰レートと非線形項がもつ爆発レートが釣り合う値とみなせ、本研究において扱っているシステムは 2 階の項がそれぞれ別の非線形性をもつ場合を含むが、本結果における指数の条件は線形の場合の優臨界に相当する条件の自然な拡張になっている。一方、技術的な問題かもしれないが、2 つの方程式が別の減衰レート、すなわち別の固有関数を持つせいでその比の評価のために指数と楕円定数に関係する仮定を置いている。この条件の発見に新規性がある。

(3) 完全非線形作用素をもつトラス上放物型方程式の障害物問題の近似解の収束レートを調べた。2010 年に L. C. Evans は解の微分評価のために非線形随伴法を導入し、その手法の一つの応用として粘性 Hamilton-Jacobi 方程式の粘性消滅法における収束レートを導出した。ここで非線形随伴法とは非線形方程式の線形化方程式の Green 函数を用いて元の解の評価を得る手法である。我々はその手法を 2 階の線形一様楕円型方程式の障害物問題および勾配拘束問題に適用し近似解の収束レートを求めた (Koike-Kosugi-Naito (2018))。その後、方程式について退化する場合や、 p -Laplace 作用素、平均曲率流に現れる作用素などを含む完全非線形の障害物問題に対して非線形随伴法を用いて収束レートを示した。より具体的には、近似解の収束パラメータについての導函数の有界性を示すことで収束レートを導出している。そのために、Bernstein 法などの評価によりペナルティ項、解の 0 階微分、1 階微分の有界性を示しておき、随伴方程式の解の評価、および解の 2 階微分の可積分性を得る必要がある。また、2 階の可積分性について一様楕円型と退化楕円型では得られる評価が異なる。それにより、実際にはそのレートが最適であるか未解決だが、一様楕円の場合と退化する場合で収束レートが異なることが示唆された。また、付録ではあるが、障害物問題の比較原理や退化の方程式に Bernstein 法を用いる際に必要となる 2 階項の係数に関する評価について放物型の場合の証明を明示した。本結果をまとめたものは国際会議のプロシーディングスに投稿し Accept が決定している。

本研究における近似解の構成は数値計算でしばしば用いられる penalization によるものであり、本結果は数値計算の際の離散化のサイズを決定できる可能性がある。

(4) 人間の指を模した筋骨格構造をもつシステム（筋骨格システム）のフィードフォワード制御可能性について考察した。動物は視覚等によるリアルタイムでのフィードバック制御により運動を行っているが、実際運動の際には初期予測のみに基づくフィードフォワード制御を有効活用しているという仮説を念頭に、本研究は筋骨格システムがフィードフォワード制御可能な条件（指や腱の長さ等パラメータの条件）を調べるものである。実際、どのような場合でもフィードフォワード制御可能となるわけではないことを注意しておく。本研究で扱った具体的モデルは、屈曲点付き 1 リンク 2 筋システム、すなわち第一関節を含めた指先を模したシステムである。先行研究では腕を模した 2 リンク 6 筋システムについて考察されているがある程度簡略化されており、筋が関節を飛び越す際の巻き付きは考慮されておらず、本研究ではその巻き付きを屈曲点として設定した。具体的には、仮想仕事の原理から目標位置での釣り合い筋内力を求め、それをフィードフォワード入力として、微分方程式論により漸近安定となるパラメータが存在することを示した。また、得られたパラメータにおいて数値計算結果および実験結果も得た。特に数値計算の際は指を模していることから筋骨格システムが動く範囲（微分方程式における解）に制限であり、それを障害物問題の penalization による近似方程式として取り扱っている。

一方、本研究ではフィードフォワード制御可能な十分条件を導出する際に大雑把な評価をしており、それは計算を行う際に規則性を持たせ証明を簡単にしているが、指のようなパラメータを含むことができていない。また、筋をワイヤのような剛体としているが、本来筋は粘性および弾性をもつため、今後はそれらを考慮した場合について考察する必要がある。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kosugi Takahiro	4. 巻 63
2. 論文標題 Equivalence of Viscosity Solutions between Obstacle and Gradient Constraint Problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 323 ~ 343
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1619/fesi.63.323	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kosugi Takahiro, Kino Hitoshi, Goto Masaaki, Matsutani Yuki	4. 巻 3
2. 論文標題 Stability conditions of an ODE arising in human motion and its numerical simulation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Results in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 100063 ~ 100063
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.rinam.2019.100063	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 木野仁, 金城善博, 田原健二, 後藤雅明, 小杉卓裕	4. 巻 2019
2. 論文標題 Fundamental analysis of the musculoskeletal potential method considering muscle viscoelastic properties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Proceedings of JSME annual Conference on Robotics and Mechatronics (Robomec)	6. 最初と最後の頁 2P2 ~ S08
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1299/jsmermd.2019.2P2-S08	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 木野仁, 片山大尚, 植村充典, 小杉卓裕	4. 巻 2019
2. 論文標題 可変剛性調節をもつコンパスモデルの波形斜面における受動歩行の検証	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第20回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会予稿集	6. 最初と最後の頁 200 ~ 202
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 小杉 卓裕, 後藤雅明, 田原健二, 木野仁	4. 巻 -
2. 論文標題 経路点を有する1リンク2筋骨格システムにおけるポテンシャル解析	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第24回ロボティクスシンポジウム講演論文集	6. 最初と最後の頁 252-258
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 木野 仁, 後藤 雅明, 小杉 卓裕, 田原 健二	4. 巻 -
2. 論文標題 筋屈曲点を有する筋骨格システムにおけるフィードフォワード位置決め制御	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第36回日本ロボット学会学術講演会講演概要集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 木野 仁, 後藤 雅明, 小杉 卓裕, 金城 善博, 田原 健二	4. 巻 -
2. 論文標題 筋の粘性特性を考慮した筋骨格システムにおけるフィードフォワード位置決め制御の基礎的な解析	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第36回日本ロボット学会学術講演会講演概要集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kosugi Takahiro, Sato Ryuichi	4. 巻 181
2. 論文標題 Existence of Global-in-Time Solutions to a System of Fully Nonlinear Parabolic Equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Acta Applicandae Mathematicae	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10440-022-00533-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 小杉卓裕, 佐藤龍一
2. 発表標題 On existence of solutions to a system of fully nonlinear parabolic equations
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小杉卓裕, 佐藤龍一
2. 発表標題 完全非線形藤田型方程式系の時間大域解の存在について
3. 学会等名 第47回発展方程式研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小杉卓裕
2. 発表標題 完全非線形藤田型方程式系に対する藤田指数を求めたい
3. 学会等名 楕円形・放物型方程式の集いの会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小杉卓裕
2. 発表標題 ある障害物問題の近似解の収束率及び勾配拘束問題との関連
3. 学会等名 非線形発展方程式セミナー@KUE（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小杉卓裕
2. 発表標題 退化/特異放物型方程式の障害物問題に対する近似解の収束率
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小杉卓裕
2. 発表標題 完全非線形方程式に対する障害物問題と勾配拘束問題の同値性
3. 学会等名 第45回発展方程式研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉卓裕
2. 発表標題 準線形方程式に対する粘性解と自由境界問題
3. 学会等名 東北大学応用数理解析若手セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉卓裕
2. 発表標題 Rate of convergence of approximate solutions to obstacle problems for quasilinear operators
3. 学会等名 京都大学 NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉 卓裕, 後藤雅明, 田原健二, 木野仁
2. 発表標題 経路点を有する11リンク2骨格システムにおけるポテンシャル解析
3. 学会等名 第24回ロボティクスシンポジア
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉 卓裕
2. 発表標題 ある非発散型方程式の自由境界問題に対する近似解の収束率
3. 学会等名 神戸大学 解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉 卓裕
2. 発表標題 屈曲点付き1リンク2筋システムの安定性
3. 学会等名 一般社団法人日本ロボット学会 ヒューマンセントリックロボティクス研究専門委員会 第十一回若手研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小杉 卓裕
2. 発表標題 随伴法を用いた自由境界問題に対する近似解の収束率
3. 学会等名 第158回神楽坂解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木野 仁, 後藤 雅明, 小杉 卓裕, 金城 善博, 田原 健二
2. 発表標題 筋の粘性特性を考慮した筋骨格システムにおけるフィードフォワード位置決め制御の基礎的な解析
3. 学会等名 第36回日本ロボット学会学術講演会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木野 仁, 後藤 雅明, 小杉 卓裕, 田原 健二
2. 発表標題 筋屈曲点を有する筋骨格システムにおけるフィードフォワード位置決め制御
3. 学会等名 第36回日本ロボット学会学術講演会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小杉 卓裕
2. 発表標題 ある準線形方程式の自由境界問題に対する近似解の収束率
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小杉 卓裕
2. 発表標題 ある自由境界問題に対する近似解の収束率について
3. 学会等名 広島数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小杉 卓裕
2. 発表標題 ある2階の偏微分方程式に対する近似解の収束率について
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

researchmap https://researchmap.jp/7000021015
--

6. 研究組織			
	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------