

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：11401

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13437

研究課題名（和文）接合漸近展開を用いた非線形熱方程式の解析

研究課題名（英文）Analysis on nonlinear heat equations based on the matched asymptotic expansions

研究代表者

原田 潤一（Harada, Junichi）

秋田大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：00580169

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,400,000 円

研究成果の概要（和文）：本課題は、非線形偏微分方程式の解構造全体の様子を調べる研究である。エネルギー臨界型と呼ばれる重要なクラスの方程式について、新しい種類の爆発解を捉えることに成功した。特に空間次元と解構造の関係性について詳しく調べた。この結果は、ベラスケス先生らの論文（2000年）で既に予想されていたものだが、その存在性を数理的に検証したことになる。また、摂動項付き方程式において、二つの解の接続可能性に関する新しい切り口の問題を提案し、そのとき生じる爆発解の構成にも部分的に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

デルピノ先生・ムッソ先生らのグループが開発した理論の拡張・精密化を行うことで、未開拓であったエネルギー臨界型方程式の解析に成功した。本課題の特色は、接合漸近展開法と呼ばれる手法を基盤にすることで、熱方程式の解の様子をより見通し良く捉える点にある。また摂動型方程式の解析を通して、二つの解の接続可能性に関する問題を提案したが、これは複雑な現象がスケールを変えて見ることで、幾つかの単純な現象に分解されることを意味している。このような現象がいつ起こるのかといった疑問にはまだまだ答えられていないが、そのような方向性の研究にも今後つながっていくと考えている。

研究成果の概要（英文）：This project is a study of a whole picture of the structure of solutions for nonlinear partial differential equations. For an important class of equations called the energy critical type, we succeeded in finding a new type of blowup solutions. In particular, the relation between the spatial dimension and the structure of solution was investigated in detail. This result was already predicted in the paper by Professor Velasquez et al. (2000), but we have mathematically verified its existence. We also proposed a new type of problems concerning the matching condition between two solutions of the equations with a perturbation term, and partially succeeded in constructing blowup solutions.

研究分野：非線形偏微分方程式の解の爆発問題

キーワード：解の爆発問題 接合漸近展開法 エネルギー臨界型方程式 非線形熱方程式

1. 研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式の数理解析において、全ての解を列挙し、分類するという大きな目標がある。それには大きく分けて2つの方向性があり、時刻無限大の解挙動を調べるものと、有限時刻に発生する爆発解を調べるものである。本課題は後者に関するものである。爆発問題の研究は、1980年代から本格的に始められ、現在に至るまで様々な方向に進展している。特に2000年以降は、解の自己相似性の観点からの理解が進み、タイプI型・タイプII型といった重要なクラス分けがなされている。タイプII型爆発は本課題の中心的なテーマである。これとは別に、偏微分方程式の非線形クラスに臨界型と呼ばれるクラスがある。熱方程式やシュレディンガー方程式などの個々の方程式において、質量臨界型やエネルギー臨界型など幾つかの臨界型クラスがあり、物理量と関連して現れることが多い。臨界型の偏微分方程式では、興味深い現象が多く観測されており、またそこから新しい手法や理論が発展している。しかし、非線形熱方程式の分野では、エネルギー臨界型クラスの問題は長い間手つかずの状態であり、本課題開始当初においても未解決であった。これは、エネルギー臨界型クラスに現れるデルタ関数型特異点を捉える手法がなかったためである。そこで本課題では、接合漸近展開法と呼ばれる従来の手法を発展させ、デルタ関数型特異点を捉え、エネルギー臨界型クラスに新たな進展を与えることを目指した。本課題を開始してから間もなく、デルピノ先生・ムッソ先生らのグループによって内部外部接着法と呼ばれる手法が開発され、エネルギー臨界型クラスの方程式に対して大きな進展があった。そこで本課題では、方向性を一部修正し、彼らの理論と接合漸近展開法を組み合わせ、より統一的な視点からエネルギー臨界型クラスの方程式を捉えることを試みた。

2. 研究の目的

本課題の大きな目的は、非線形偏微分方程式に現れる新しい種類の爆発解を見つけ、その機構を明らかにすることである。ここでは特に、エネルギー臨界型クラスの方程式に焦点を当てる。このクラスの方程式は、偏微分方程式の中でも重要なクラスであることはよく認識されているが、未解決なところが多い。エネルギー臨界型クラスの大きな特徴として、空間次元によって解のダイナミクスが大きく異なることが挙げられる。これを踏まえ、本課題では爆発解の存在性と空間次元の関係を明らかにすることを目指す。

(1) エネルギー臨界型熱方程式におけるデルタ関数型特異点の解析

非線形熱方程式において、デルタ関数型特異点が現れるという予想は2000年頃からなされていたが、2012年にシュバイアー先生によって空間四次元の場合に初めてその存在性が証明された。本課題開始当初の段階では、この論文がエネルギー臨界型方程式に関する唯一の結果であった。この未開拓な分野に新しい視点を与えることが一つ目の目標である。また解析手法の面において、彼らの手法とは別の手法を提案したいと考える。その理由は、彼らの理論がシュレディンガー方程式から来ているため、熱方程式の特性を十分に活かしていきにくいように思えるからである。熱方程式では、その基本性質から解の各点での値を精密に見積もることができる。この性質を取り入れるためには、接合漸近展開法を基盤とした理論が相応しいのではないかと予想できる。従来型の接合漸近展開法を改良し、デルタ関数型特異点を捉えられる形に発展させることで、この分野に新しい切り口を与えることが二つ目の目標である。また、空間四次元に対するシュバイアー先生の理論と接合漸近展開法を基盤とした理論の相違性や同値性なども明らかにしたい。

(2) 摂動項を持つエネルギー臨界型熱方程式における爆発問題の解析

本問題は、(1)から派生した問題である。一般に臨界型の方程式に摂動を与えると、定常解の不安定性によって、解のダイナミクスが劇的に変化する。この変化を捉えることが目標である。本問題は、コズ先生・マーテル先生・ラファエル先生のシュレディンガー方程式に対する研究(2016年)の熱方程式版である。臨界型方程式という括りで、シュレディンガー方程式や波動方程式など、型の違う方程式同士の解のダイナミクスの相違点についても興味を持っている。

3. 研究の方法

まずは、方程式に潜在している性質を見つけ出すために、接合漸近展開法による解析から始めた。ベラスケス先生によって開発された従来型の接合漸近展開法に加え、シュレディンガー方程式など型の違う方程式の理論なども参考にしながら解析を行った。本課題を開始してから間もなく、デルピノ先生・ムッソ先生らのグループによってエネルギー臨界型クラスの方程式に対する新しい理論が提唱された。この理論が非常に強力で、本課題の目的と合致していたため、本課題の研究計画を一部修正して、接合漸近展開法と彼らの手法を組み合わせ、より見通しの良い視点からの解析手法の構築を目指した。

(1) エネルギー臨界型熱方程式におけるデルタ関数型特異点の解析

空間三次元、四次元、五次元、六次元それぞれの場合について、接合漸近展開法を用いて、方程式に潜在するバランス条件を調べた。フィリパス先生・ヘレロ先生・ベラスケス先生ら(2000年)の文献を参考に計算を実行した。またこの次に考察したい連立方程式系の問題にも応用できるように、解析手法の改良も試みた。

(2) 摂動項を持つエネルギー臨界型熱方程式における爆発問題の解析

方程式にべき乗型摂動項を加え、そのときどのような爆発解が存在するのかを調べた。特にべきの指数の変化に伴い、解構造はどのように変化し、最終的には何種類に分類されるのかを考察した。また想定していた以上に計算が膨大であったため、計算量を簡略化する方向にも努めた。

4. 研究成果

(1) エネルギー臨界型熱方程式におけるデルタ関数型特異点の解析

()空間五次元の場合に、爆発解を構成することに成功した。空間五次元の爆発解の構成は、既にデルピノ先生・ムッソ先生らによってなされていたが、本課題ではより不安定性の高い爆発解を構成した。不安定性の高い爆発解はこれまでにみつかっておらず、本研究が初めての例を与えたことになる。その中でエネルギー臨界型熱方程式では、爆発レートが可算無限個存在することがわかった。解析手法の面においては、デルピノ先生・ムッソ先生らの手法と、従来型の爆発解析とを組み合わせることで、より汎用性の高い手法を構築することができた。ここでの手法は、連立方程式系などのより広いクラスの方程式にも拡張できそうである。今後の課題として調べていく予定である。

()空間六次元の場合に、爆発解を構成することに成功した。空間六次元の爆発解の構成は、本研究が初めてである。空間六次元はエネルギー臨界型方程式において、解のダイナミクスの切り替わりの境目になっている。そのため、他の次元では見られない現象が起こることがある。実際、エネルギー無限大爆発が起こることを発見した。この現象は、他の型の方程式と比べても非常に珍しい現象である。本課題の一番の成果といえる。ここで構成された解は、二つの爆発解を並べて、その相互作用のバランス条件を見積もることによって作られている。この相互作用の見積もりにおいて、接合漸近展開法が重要な役割を担っている。

(2) 摂動項を持つエネルギー臨界型熱方程式における爆発問題の解析

べき乗型摂動項を方程式に加えて、爆発解の存在・非存在を調べたところ、べきの指数 p が 0 と 1 の間の場合に、新たな解を構成することに成功した。本問題は非線形性に特徴があり、解の値が大きいところではより増大して、解の値が零に近いところではより零に近づいていくという性質を持っている。この性質を活かして、値の大きな解と値の小さな解を並べて、それらが互いにバランスを取るようして解を構成した。ここでのバランス条件は非常に繊細なものであるが、接合漸近展開法を複数回用いることで導出に成功した。課題当初の予定では、べきの指数 p が 1 より大きい場合を考察する予定であった。それは、コズ先生・マーテル先生・ラファエル先生がシュレディンガー方程式に対して行っていたからである。しかし p が 1 より大きい場合については、新しい結果を得ることはできなかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Junichi Harada	4. 巻 6
2. 論文標題 A Type II Blowup for the Six Dimensional Energy Critical Heat Equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annals of PDE	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40818-020-00088-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Junichi Harada	4. 巻 37
2. 論文標題 A higher speed type II blowup for the five dimensional energy critical heat equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non lineaire	6. 最初と最後の頁 309-341
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.anihpc.2019.09.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 原田潤一
2. 発表標題 2つのべき乗型非線形項を持つ熱方程式の爆発解の存在について
3. 学会等名 第47回発展方程式研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 原田潤
2. 発表標題 ソボレフ臨界冪と劣線形冪を持つ熱方程式の爆発解とそのレートについて
3. 学会等名 RIMS共同研究（グループ型 A）「非線形問題の精密解析」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原田潤
2. 発表標題 非線形熱方程式の解の爆発問題について
3. 学会等名 2021年度日本数学会東北支部会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 原田潤一
2. 発表標題 べき乗型非線形熱方程式におけるタイプII爆発解について
3. 学会等名 RIMS共同研究（グループ型 A）非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 原田潤一
2. 発表標題 5次元・6次元エネルギー臨界型熱方程式におけるタイプII型爆発解の存在について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 原田潤一
2. 発表標題 Construction of blowup solutions for the energy critical heat equation in 5D and 6D
3. 学会等名 第37回九州における偏微分方程式研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 原田潤一
2. 発表標題 Singularities of blowup solutions for heat equation with a nonlinear boundary condition
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 原田潤一
2. 発表標題 Profile of blowup solutions to the heat equation with nonlinear boundary condition
3. 学会等名 8th Euro-Japanese Workshop on Blow-up (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------