

令和 5 年 5 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13438

研究課題名（和文）代数的手法による離散系の可積分性判定

研究課題名（英文）Algebraic methods for determining integrability of discrete equations

研究代表者

間瀬 崇史（MASE, Takafumi）

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：80780105

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：離散可積分系についての研究を、代数的手法による可積分性判定法という観点から行った。まず、格子方程式において、方程式を考える領域が次数増大に与える影響について調べ、領域がどのような条件を満たすべきかを定式化した。次に、Laurent性を持つ方程式の一般的な性質を調べた。Laurent性、既約性、互いに素条件は、セットにして考える限り、領域の取り方に依存しないことを証明した。さらに、特異点閉じ込めのパターンの情報から次数増大を求める手法を多次元格子上の離散方程式に拡張し、その手法の厳密性を、いくつかの方程式の場合に示した。そのほか、特異点閉じ込めを通過しない可積分性についても研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏差分方程式や高階の常差分方程式は様々な分野で出現するが、これらの、特に偏差分方程式の可積分性判定について、わかっていることは非常に少ない。今回、領域を満たすべき条件を一般的に定式化したことで、どのような初期値問題を考えるべきか明確にすることができた。また、特異点パターンから次数増大を求める手法を多次元格子の場合に拡張することができたが、これにより、広いクラスの偏差分方程式に対して、次数増大が簡単に予想できるようになった。これは将来に向けた第一歩であり、将来的にこの手法の厳密性が保証されれば、これは次数増大の計算手法として確立し、格子方程式の可積分判定はかなり容易になるだろう。

研究成果の概要（英文）：I studied the integrability of discrete equations by algebraic methods. First, I studied how the choice of an initial value problem of a discrete equation on a multi-dimensional lattice affects its degree growth. I formulated the conditions that a domain must satisfy for integrability. Next, I studied general properties of lattice equations with the Laurent property. I proved that if considered as a set, the Laurent property, the irreducibility and the coprimeness are independent of the choice a domain. Moreover, I studied the method for computing degree growth from singularity pattern. I tried to extend the method to the multi-dimensional case, and I confirmed that the method indeed gives the correct degree growth for several equations. I also studied discrete integrable systems that do not pass the singularity confinement test.

研究分野：数物系科学・数学

キーワード：可積分系 離散可積分系 代数的エントロピー Laurent現象

## 1. 研究開始当初の背景

可積分性判定とは、具体的な方程式が可積分となるのかどうかを調べる手法である。離散系における可積分性判定手法として有名なのは「特異点閉じ込め」と「次数増大(代数的エントロピー)による判定」である。特異点閉じ込めは適用が容易であるものの、判定精度に問題がある。一方、次数増大による判定は判定の精度に優れるものの、実際の判定に用いるのは困難であり、具体的な方程式に対して判定をする一般的な手法は知られていない。現在では、具体的な方程式の次数増大を計算する統一的な手法を開発することが、可積分性判定の大きな目的となっている。

長い間、離散系における可積分性判定の主な研究対象は1次元格子上的方程式であった。特に、1次元格子上的2階の方程式の場合は、可積分性判定について多くのことがわかっている。離散系の可積分性判定について、3階以上の方程式についての研究は非常に少なく、偏差分方程式についての研究はほとんどないような状態であった。しかし近年、多次元格子上的方程式の有用な例が数多く構成されたことにより、多次元格子上的方程式についても徐々に研究が行われるようになってきている。

ごく最近、Halburd によって、特異点閉じ込めの情報から直接方程式の次数を求める手法が開発された。さらに、Halburd の手法の亜種として、次数増大のみを求めるための手法「express method」が開発された。これらの手法を用いれば簡単に方程式の次数増大が予想できるものの、得られる値はあくまで予想値であり、手法の厳密性を何らかの手法で保証しなければならない。また、本研究開始段階では、Halburd の手法と express method はいずれも、2階の常差分方程式にのみ適用がなされていた。これらの手法の厳密性の保証について研究開始時にわかっていたことは、特異点閉じ込めを通過する2階の方程式の場合に、express method が厳密な次数増大を与えるということのみである。これは、研究代表者らが代数幾何学的手法を用いて示したものであるが、手法が代数曲面の理論に本質的に依存しているため、3階以上の方程式や偏差分方程式の場合に直接拡張をすることはできない。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、代数的な手法を用いて離散系における可積分性判定を確立すること、すなわち、差分方程式の次数増大を求めるための統一的な手法を開発することである。具体的には、express method を高階の方程式や多次元格子上的方程式に拡張することと、特異点閉じ込めを通過しない可積分性の構造を解明することを目指す。

## 3. 研究の方法

本研究の方法は、主に以下の2つである。

(1)

express method を高階の方程式や多次元格子上的方程式に拡張するにあたって問題となるのは、手法の厳密性の保証である。2階の方程式の場合は代数曲面の理論を用いて厳密性が保証できたが、3階以上の方程式や偏差分方程式の場合には、代数幾何学を用いて手法の厳密性を担保するのは筋が悪いように思われる。これを解決するため、本研究では、因子の打消しを用いて手法の厳密性を保証する。その際、因子の打消しを厳密に記述する手法として、互いに素条件(coprimeness)を用いる。すなわち、express method では特異点パターンから次数増大を直接求めていたが、本研究では、因子打消しパターンから次数増大を直接計算することを目指す。

(2)

特異点閉じ込めを通過しない可積分系の構造解明をするにあたって、最初の出発点となるのは線形化可能な系である。2階の常差分方程式の場合、特異点閉じ込めを(本質的な意味で)通過しない可積分系は、必ず特異点閉じ込めを通過する系に Riccati 型の拡張を施して得られることが知られている。しかし、3階以上の方程式や多次元格子上的方程式においては、これは正しくないと予想される。よって、特異点閉じ込めを通過しない可積分系であって、線形化不可能なもの構成を試みる。具体的に用いる手法は、2階の線形化不可能な可積分系に新しい変数をうまく付け加えることで、3階以上の方程式を構成するというものである。これらの方程式が数多く構成できた場合、具体例を細かく解析することで、方程式たちに共通の性質を調べる。

## 4. 研究成果

本研究の結果、以下のような成果が得られた。なお、(1)と(2)の領域に関する研究は本研究開始当初に予定していたものではないが、格子方程式の可積分性判定をするにあたって重要なものである。

(1)

格子方程式を考えるにあたって、定義領域にどのような条件を課すべきなのかという点を、可積分性との関係を中心に調べた。その結果、一般に可積分とされている方程式であっても、病的な領域で初期値問題を考えると、次数増大の意味で非可積分となってしまうという結果が得られた。この結果をもとに、格子方程式の初期値問題を考えるにあたって、どのような条件を領域に課さなければいけないのかを定式化した。条件は一般的な形で記述することができるので、単独系の偏差分方程式を考える限り、領域には本研究で得られた条件を課するのが前提条件となる。連立形の偏差分方程式の領域については、今後の重要な課題である。

(2)

Laurent 性を持つ単独形方程式の一般的な性質を調べた。Laurent 性、既約性、互いに素条件をセットにして考える限り、この性質は(1)の条件を満たす領域の取り方に依存しないことを証明した。すなわち、これらの性質は、領域に依存しない方程式に固有のものである。この結果のおかげで、これらの性質を示す際、領域の特殊性(例えば平行移動不変性など)を用いた議論を行うことが正当化される。

(3)

離散可積分系に Riccati 型の拡張を施して得られるような高階の方程式(3 階以上の常差分方程式)について、主に特異点閉じ込めパターンと次数増大の観点から調べた。まず、既知の方程式を Riccati 拡張して得られる数多くの具体例について、その特異点閉じ込めパターンや次数増大を詳しく調べた。同時に、特異点パターンから Riccati 拡張の情報を得ることで、Riccati 拡張をする前の方程式を復元する方法についても、具体例を中心に調べた。さらに、他の方程式の Riccati 拡張とはなっていない方程式であって、その次数が3 次関数的に増大するような具体例を構成することができた。すなわち、Riccati 型拡張以外にも可積分性を保つような拡張があるということである。本研究では、そのような拡張手法の細かい解析まではたどり着くことができなかった。特異点閉じ込めを通過しない可積分系の全体像を得るためには、そのような拡張について解明することは避けて通ることができず、今後の重要な課題である。

(4)

express method の元となっている Halburd の手法について調べた。Halburd の手法をうまく偏差分方程式に拡張した結果、方程式の次数が実際に予想できることを、数多くの具体例に対して確かめることができた。さらに、いくつかの方程式の場合に、この手法によって次数が厳密に計算できることを示すことができた。なお、この手法を用いて厳密に次数を計算しようとする際には大域的な特異点パターンの特定が必要になるが、その部分には、互いに素条件から得られる情報を用いた。手法をより広いクラスの方程式に適用し、さらにその厳密性を保証することは、今後の課題である。さらに、互いに素条件を示すことは容易でないため、この部分の手法の改善も将来的には必要となる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Kamiya R., Kanki M., Mase T., Tokihiro T.	4. 巻 62
2. 論文標題 Coprimeness-preserving discrete KdV type equation on an arbitrary dimensional lattice	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 102701 ~ 102701
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0034581	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nakamura Yusuke, Sakamoto Ryotaro, Mase Takafumi, Nakagawa Junichi	4. 巻 77
2. 論文標題 Coordination sequences of crystals are of quasi-polynomial type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Crystallographica Section A Foundations and Advances	6. 最初と最後の頁 138 ~ 148
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1107/S2053273320016769	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 R. Kamiya, M. Kanki, T. Mase, T. Tokihiro	4. 巻 B78
2. 論文標題 Algebraic entropy of a multi-term recurrence of the Hietarinta-Viallet type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録別冊	6. 最初と最後の頁 121 ~ 153
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hietarinta J, Mase T, Willox R	4. 巻 52
2. 論文標題 Algebraic entropy computations for lattice equations: why initial value problems do matter	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 49LT01 ~ 49LT01
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab5238	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mase Takafumi, Willox Ralph, Ramani Alfred, Grammaticos Basil	4. 巻 52
2. 論文標題 Singularity confinement as an integrability criterion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 205201 ~ 205201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab1433	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kamiya Ryo, Kanki Masataka, Mase Takafumi, Okubo Naoto, Tokihiro Tetsuji	4. 巻 51
2. 論文標題 Toda type equations over multi-dimensional lattices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 364002 ~ 364002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aad375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kamiya Ryo, Kanki Masataka, Mase Takafumi, Tokihiro Tetsuji	4. 巻 51
2. 論文標題 Nonlinear forms of coprimeness preserving extensions to the Somos-4 recurrence and the two-dimensional Toda lattice equation -investigation into their extended Laurent properties-	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 355202 ~ 355202
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aad074	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mase Takafumi	4. 巻 3
2. 論文標題 Studies on spaces of initial conditions for non-autonomous mappings of the plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems	6. 最初と最後の頁 xyy010
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyy010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kanki Masataka, Mase Takafumi, Tokihiro Tetsuji	4. 巻 14
2. 論文標題 On the Coprimeness Property of Discrete Systems without the Irreducibility Condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ramani A, Grammaticos B, Willox R, Mase T, Satsuma J	4. 巻 3
2. 論文標題 Calculating the algebraic entropy of mappings with unconfined singularities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems	6. 最初と最後の頁 xyy006
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyy006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mase T, Willox R, Ramani A, Grammaticos B	4. 巻 51
2. 論文標題 Integrable mappings and the notion of anticonfinement	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 265201 ~ 265201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aac578	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 神吉雅崇, 時弘哲治, 間瀬崇史	4. 巻 2071
2. 論文標題 多次元格子上的擬似可積分系	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 43 ~ 64
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 T. Mase
2. 発表標題 Integrability tests for lattice equations - or why initial value problems do matter
3. 学会等名 Integrable Systems 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Mase, R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos
2. 発表標題 Dynamical degrees and singularity patterns
3. 学会等名 International Conference on Symmetry and Integrability in Difference Equations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Mase
2. 発表標題 The Laurent property, irreducibility and coprimeness of non-integrable partial difference equations
3. 学会等名 Pure maths colloquium talks (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------