様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３年　６月１１日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ１３４５０

研究課題名（和文）存在定理の一様計算可能性と構成的証明可能性

研究課題名（英文）Uniform computability and constructive derivability between existence sentences

研究代表者
藤原　誠（Fujiwara, Makoto）

明治大学・研究・知財戦略機構（生田）・研究推進員（客員研究員）

研究者番号：２０７７９０９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：数学の定理の多くは「条件を満たす全てのXに対して，条件を満たす解Yが存在する」という形をしており，そのような何かしらの解の存在を主張する定理は「存在定理」と呼ばれる．
本研究では，有限型直観主義算術の上で計算可能数学における存在定理の間の還元可能性を原始再帰的なものに制限した還元可能性を定式化し，比較的単純な論理式として形式される全ての存在定理に対して，それが構成的逆数学における存在定理の間の通常の方法による導出可能性と同値になることを示した．また，このメタ定理が数学の多くの定理に対して適用可能であること，及び一部については適用可能ではないことを実証した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
数学の定理の多くは「条件を満たす全てのXに対して，条件を満たす解Yが存在する」という形をしており，そのような何かしらの解の存在を主張する定理は「存在定理」と呼ばれる．存在定理同士の強さの関係を調べる研究が，計算可能数学や構成的逆数学のそれぞれの文脈において行われてきた．
本研究では，計算可能数学における存在定理の間の還元可能性を，直観主義論理に基づいた有限型算術における導出可能性を用いて部分的に特徴付けた．これにより．これまでそれぞれ独立に研究が進められてきた計算可能数学と構成的逆数学の直接的な関連性が一部明らかになった．

研究成果の概要（英文）：Most of mathematical theorems have a form that "for any X satisfying some condition, there exists some solution Y for X". Such theorems are called "existence theorems". In computable mathematics, their interrelation has been studied via Weihrauch reducibility.
In this project, we formalized the primitive recursive version of Weihrauch reducibility in finite-type arithmetic and showed that for any existence sentences P and Q of some syntactical form, P is primitive recursively Weihrauch reducibile to Q verifiably in a classical finite-type arithmetic T if and only if P is derivable from Q in the semi-intuitionistic counterpart iT of T with a proof of the standard structure. Then we established that this meta-theorem is applicable to many existence theorems by providing several concrete examples. In addition, we showed that the syntactical restriction in our meta-theorem cannot be avoided by providing a counterexample.

研究分野：数学基礎論

キーワード：計算可能数学　構成的逆数学　逆数学　直観主義算術　存在定理

１．研究開始当初の背景

通常，数学においては，公理から定理を導出するのみである．一方で，数学そのものを解析する数学基礎論においては，各定理を証明するのに最低限必要な公理を調べるために弱い公理系の下で定理から公理を導出したり(逆数学プログラム)，各定理の計算可能性や計算不可能性の度合いを調べたりする．数学の定理の多くは「条件 A(X)を満たす全ての X に対して，条件 B(X, Y)を満たす解 Y が存在する」という形をしており，そのような何かしらの解の存在を主張する定理は「存在定理」と呼ばれる．数学基礎論の様々な分野において存在定理同士の「強さ」を比較する研究が行われているが,「強さ」を測るための尺度や方法論は分野ごとに異なる．そのため，同じ二つの存在定理の強さの関係が，それぞれの分野で独立に研究されていることも多い．本研究は，共に存在定理同士の強さの関係を研究する計算可能数学及び構成的逆数学という二つの分野の関連性を数学的に調べるものである．

これまで計算可能数学においては，Weihrauch 還元と呼ばれる一様計算概念に基づいた存在定理の間の還元可能性が調べられてきた．存在定理 P_2 が存在定理 P_1 に Weihrauch 還元可能であることは，おおよそ「P_1 を用いて P_2 を一様に計算する計算プログラムがあることが数学的に証明できる」ことを意味する．一方，構成的逆数学においては，その証明の全てにおいて構成的な推論のみを認める構成的数学の立場から存在定理の間の相互導出関係を調べる．計算可能数学と構成的逆数学の証明には類似したものが多いが, そこには決定的な違いもある．特に，計算可能数学の証明は古典論理(通常の数学の論理)に基づいているため，与えた計算プログラムが所望の解を計算することの証明においては，背理法等の非構成的な推論も許容される．一方，構成的逆数学においては存在定理 P_1 から存在定理 P_2 を導出する際に P_1 を何回用いても構わないが，Weihrauch 還元においては P_1 を用いて P_2 を計算する際に P_1 を一度しか用いることができない．これらの違いから，計算可能数学と構成的逆数学の直接的な関連性を見出すことは難しく，計算可能数学と構成的逆数学は最近までそれぞれ独立に研究が進められてきた．しかし，2011 年に出版された[HM11]以降，証明論の手法を使って直観主義算術における存在定理の証明可能性と一様計算可能性の直接的な関連性を調べる研究が，筆者を含め数人の研究者によって推し進められてきた．特に，筆者は[F15]において，計算可能数学における存在定理の原始再帰的一様計算可能性の概念を有限型算術の枠組みにおいて形式化し，条件(X)及び B(X, Y)が比較的単純な論理式として形式化される任意の存在定理 P に対して,「P が原始再帰的一様計算可能であることが古典論理に基づいた弱い有限型算術で証明できること」は「P が構成的逆数学のための基盤体系として用いられる直観主義二階算術で証明できること」と同値であることを示した．これは，相対的な強さの比較ではなく，一つの存在定理の一様計算可能性や構成的証明可能性だけを考えるのであれば，一様計算可能性と構成的な証明可能性には密接な関連があることを意味する．一方，相対的な強さの比較をするための計算可能数学における存在定理間の還元可能性と構成的逆数学における存在定理間の導出可能性の関連性については，[K17]において一定の成果が得られてはいたものの，明確な解答は与えられていなかった．

また，計算可能数学においては，存在定理の列版「条件 A(X_n)を満たす X_n の可算無限列 X に対して，全ての n に対して B(X_n, Y_n)を満たす解 Y_n の可算無限列 Y が存在する」を考えることで,「存在定理 P_1 は，存在定理 P_2 に Weihrauch 還元可能ではないが，P_2 の列版 Seq(P_2)に Weihrauch 還元可能である」という場合があることが知られていた．例えば，弱ケーニヒの補題 WKL は，非構成的原理 LLPO に Weihrauch 還元可能ではないが，LLPO の列版 Seq(LLPO)に Weihrauch 還元可能である．一方，構成的逆数学においては，可算選択公理を仮定すれば LLPO は WKL を導出するが, そうでなければ LLPO は WKL を導出しないことが知られていた．

２．研究の目的

本研究の目的は，計算可能数学における存在定理間の還元可能性と構成的逆数学における存在定理間の導出可能性の直接的な関連性を解明することである．特に，[F15]において定式化された存在定理の原始再帰的一様計算可能性の概念を一般化する形で存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念を定義し，その概念が計算可能数学における存在定理間の還元可能性の実際の証明にどの程度適用可能であるかを検証すると共に，その概念と構成的逆数学における存在定理間の導出可能性の関連性を明らかにすることを目指した．

３．研究の方法

存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念を定式化するための枠組みとして，高階逆数学やプルーフ・マイニングの研究の枠組みとして幅広く用いられている有限型算術を用いた．特に，直観主義有限型算術において，[F15]における存在定理の原始再帰的一様計算可能性の概念を一般化する形で定義した存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念と同値になる証明概念を特定するために，有限型算術の証明論における伝統的手法である二重否定翻訳及び型付き実現可能性解釈を駆使した．さらに，本研究において定義した存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念が，計算可能数学における存在定理間の還元可能性の実際の証明にどの程度適用可能であるかを検証するために，サンプルとして，計算可能数学における存在定理間の還元可能性についてのいくつかの具体的な証明を精査した．また，構成的逆数学における具体的な証明に適用可能な形で存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念と同値になる証明概念を与えるため，構成的逆数学における存在定理間の同値性についてのいくつかの具体的な証明を詳しく分析し，それが直観主義有限型算術においてどのように形式化されるかを検討した．

４．研究成果

(1) まず，計算可能数学における存在定理間の Weihrauch 還元可能性を原始再帰的な計算プログラムに制限したものに対応する概念である，存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念を，有限型算術の枠組みにおいて定式化した．この定式化によれば，存在定理 P が自明な存在定理 Q に原始再帰的一様還元可能であることは，P が[F15]の意味で原始再帰的一様計算可能であることと同値となる．この意味で，本研究において定式化された存在定理間の原始再帰的一様還元可能性の概念は[F15]における存在定理の原始再帰的一様計算可能性の概念の一般化である．一方，存在定理 P_i「条件 A_i(X)を満たす全ての X に対して，条件 B_i(X, Y)を満たす解 Y が存在する」(i = 1, 2)に対し，構成的逆数学における「P_1 -> P_2」の証明は，通常以下の構造をしている：

1. A_2(X)を満たす X を任意にとって固定する；
2. X から A_1(X’)を満たす X’を構成する；
3. Q を用いて B_1(X’, Y’)を満たす Y’をとる；
4. Y’から B_2(X, Y)を満たす Y を構成する．

本研究では，直観主義有限型算術 T において T が Φ(P_1, P_2)を証明することが，T が上記の構造で「P_1 -> P_2」を構成的に証明することを要請するように存在定理間の通常還元論理式 Φ(P_1, P_2)を定義した．そして，条件 A_i(X)及び B_i(X, Y)が existential-free と呼ばれる形をした比較的単純な論理式として形式化される任意の存在定理 P_i「A_i(X)を満たす全ての X に対して，B_i(X, Y)を満たす解 Y が存在する」(i = 1, 2)に対し，「P_1 が P_2 に原始再帰的一様還元可能でありそれが有限型古典算術 S で証明できる」ことが「通常還元論理式 Φ(P_1, P_2)が対応する半直観主義算術 S’で証明できる」ことと同値であることを示した．さらに，弱ケーニヒの補題とその変種，無限グラフ理論における結婚定理，実解析学における中間値の定理らの関係性についての計算可能数学及び構成的逆数学における結果やその証明を詳しく分析し，上記のメタ定理がそれらの大部分に対して適用可能であること，及び一部については適用可能ではないことを示した．

この結果は，論文 Weihrauch and constructive reducibility between existence statements (Computability, vol. 10, no. 1, pp. 17-30, 2021) において発表されている．

(2) 前述の通り，計算可能数学においては，「存在定理 P_1 は存在定理 P_2 の列版 Seq(P_2)に Weihrauch 還元可能である」という形の主張が多く見受けられる．この事実を踏まえ，本研究では，「存在定理 P_1 が存在定理 P_2 の列版 Seq(P_2)に原始再帰的一様還元可能である」ことを，有限型算術の枠組みにおいて構成的証明の観点から特徴付けることに成功した．特に，通常還元論理式 Φ(P_1, P_2)を導出する強い還元論理式 Φ^{+}(P_1, P_2)を導入し，条件 A_i(X)及び B_i(X, Y)が existential-free と呼ばれる形をした比較的単純な論理式として形式化される任意の存在定理 P_i「A_i(X)を満たす全ての X に対して，B_i(X, Y)を満たす解 Y が存在する」(i = 1, 2)に対し，「P_1 が P_2 の列版 Seq(P_2)に原始再帰的一様還元可能でありそれが有限型古典算術 S で証明できる」ことが「強還元論理式 Φ^{+}(P_1, P_2)が対応する半直観主義算術 S’に可算選択公理を加えた体系で証明できる」ことと同値であることを示した．さらに，計算可能数学と構成的数学の両方の文脈で調べれていた WKL と LLPO の関係性についてのそれぞれの証明を精査し，本研究で得られたメタ定理がそれらの証明に適用可能であることを示した．この事実は，本研究で得られたメタ定理が「計算可能数学における還元可能性証明」と「構成的数学における導出可能性証明」の間の非自明な変換を与えるものであることを示唆する．

この結果は，論文 Parallelizations in Weihrauch reducibility and constructive reverse mathematics (Lecture Notes in Computer Science, vol. 12098, pp. 38-49, 2020) において発表されている．

本研究では，上記(1)及び(2)の研究成果により，多くの類似性が知られていた計算可能数学と構成的逆数学の両者の直接的な関連性について，新たなる知見をもたらすことができた．

〈引用文献〉

[HM11] J. L. Hirst and C. Mummert, Reverse mathematics and uniformity in proofs without excluded middle, Notre Dame Journal of Formal Logic 52, no.2, pp. 149-162, 2011.
[F15] M. Fujiwara, Intuitionistic provability versus uniform provability in RCA, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9136, pp. 1-10, 2015.
[K17] R. Kuyper, On Weihrauch reducibility and intuitionistic reverse mathematics. J. Symb. Log. 82(4), 1438-1458, 2017.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名	4．巻
Makoto Fujiwara	10
2．論文標題	5．発行年
Weihrauch and constructive reducibility between existence statements	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Computability	17～30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.3233/COM-190278	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Makoto Fujiwara	12098
2．論文標題	5．発行年
Parallelizations in Weihrauch Reducibility and Constructive Reverse Mathematics	2020年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Lecture Notes in Computer Science	38～49
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/978-3-030-51466-2_4	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　1件／うち国際学会　3件）

1．発表者名
Makoto Fujiwara
2．発表標題
Parallelizations in Weihrauch reducibility and constructive reverse mathematics
3．学会等名
Computability in Europe 2020: Beyond the horizon of computability（国際学会）
4．発表年
2020年

1．発表者名
Makoto Fujiwara
2．発表標題
Weihrauch and constructive reducibility between existence statements
3．学会等名
Seventeenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis（招待講演）（国際学会）
4．発表年
2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関