

令和 4 年 6 月 12 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13458

研究課題名(和文)外力を持つ平均曲率流運動方程式とコンパクトな進行波解

研究課題名(英文) Compact traveling waves for mean-curvature flow with driving force

研究代表者

物部 治徳 (MONOBE, HARUNORI)

岡山大学・異分野基礎科学研究所・特任准教授

研究者番号：20635809

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：細胞運動や液滴運動など境界や膜を持つ現象の数理モデルに共通する、外力を持つ平均曲率流方程式に着目して、スポットの形状を保ちながら一定方向に進む解の理論解析を行なった。その結果、以下のことがわかった：(1) 外力が正值であれば、スポット状の進行波解は一意的に存在する。(2) 外力が負値であれば、スポット状の進行波解は存在しない。(3) 外力が符号変化して一定の条件を満たせば、スポット状の進行波解は一意的に存在する。(4) スポット解の形状は全て凸で、不安定であることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏微分方程式で記述される数理モデルにおいて、スポット状パターンの発生メカニズムは未だ明確にはわかっておらず、現在もモデル構築の際は、経験則に頼るところが多い。このため、より複雑な形状のパターンへの解析が滞っている。本研究成果は、スポット状の物質が移動する現象の数理モデルを考えた時に、その構築方法や解の振る舞いの解析の手助けになると考えられる。

研究成果の概要(英文)：We studied the mean-curvature flow with driving force which is derived from some mathematical models, such as cell-locomotion and droplet motion. As a result, we have the following results：(1) if the driving force is positive, there exists a unique compact traveling wave (CTW) solutions. (2) if the driving force is negative, there does not exist any CTW solutions. (3). if the driving force is sign-changing and some conditions are satisfied, there exists a unique CTW solutions. (4). if CTW exists, every CTW is convex and unstable.

研究分野：数学

キーワード：平均曲率流方程式 進行波解

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

自然界において、細胞運動や油滴の運動、Hele-Shaw bubblesや神経細胞などの活動電位など、閉じた曲線や曲面が一定方向に移動する現象は色々なところで確認されていた。近年、興味深いことにこれらの現象に関連する数理モデルがいくつか提唱されており、外力を持つ平均曲率流方程式によって記述されるものがいくつか存在する。これらの研究は、実験や数値計算ではしばしば確認されているが、その複雑さから理論解析に関しては、ほとんど何もわかっていない状態であった。

## 2. 研究の目的

本研究では、細胞運動や液滴運動などに関連する数理モデルに着目して、それらに共通する数理構造の解明を行うことである。そのために、本研究では、たくさんある数理モデルの中から、いくつかのモデルに共通して出現する「外力を持つ平均曲率方程式」に着目して、その解析を行った。具体的には、形状を一定に保ちながら一定の方向に移動する進行波解の解析を行った。進行波解の理論解析の多くは空間1次元の結果であったり、また空間2次元以上の場合には全空間で定義される Grim Reaper や V 字型進行波などの全域解であり、閉じた曲線や曲面に関する結果はほとんど報告されていない状況であった。そこで、まずは軸対称のものや、凸形状のものの存在や一意性について調べていくことにした。

## 3. 研究の方法

閉曲面の進行波解の構造を調べるために、まずは閉曲面に関する幾何学的な性質を調べ、その後、楕円型や放物型の偏微分方程式の可解性に関する結果を調べた。また、近年 Chen-Kohsaka-Ninomiya (2014) や Ninomiya-Monobe (2017) により、自由境界問題におけるコンパクトな進行波解の存在が議論されており、それらの結果を応用出来ないか考察をした。また、Mathematica や C 言語など数値計算を用いて、解のダイナミクスに関する情報を先験的に予想し、そこからどのような理論解析が有効であるかを予測した。その他には、進行波解の解析に詳しい、国内外の研究者である Ninomiya, Taniguchi, Hamel などと情報交換を行い、研究を進めた。

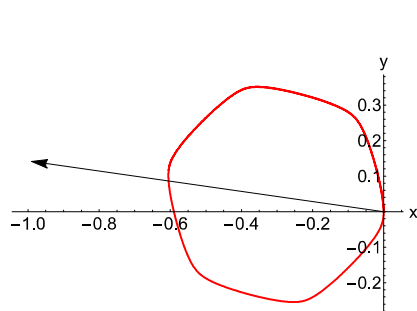
## 4. 研究成果

外力を持つ平均曲率流方程式に着目して、スポットの形状を一定に保ちながら一定方向に進む解の理論解析を行なった。本研究では、外力の自由度と異方性の自由度になるべく一般性を持たせて、どのような条件下でスポット状の進行波解(コンパクトな進行波解)が存在する

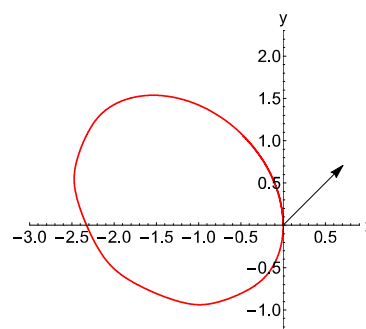
のか、形状はどのようになるのか、安定性はどうなるのか、について研究を行なった。

#### (A) 空間 2 次元における結果

空間 2 次元の場合は、閉曲線の構成が重要となるが、曲線が閉じる条件が明らかなこともあり比較的解析がうまくできた。以下のことがわかった：(1) 外力が正值であれば、スポット状の進行波解は一意的に存在する。(2) 外力が負値であれば、スポット状の進行波解は存在しない。(3) 外力が符号変化して一定の条件を満たせば、スポット状の進行波解は一意的に存在する。(4) スポット解の形状は全て凸で、不安定になる。



(外力が正值の場合)



(外力が符号変化する場合)

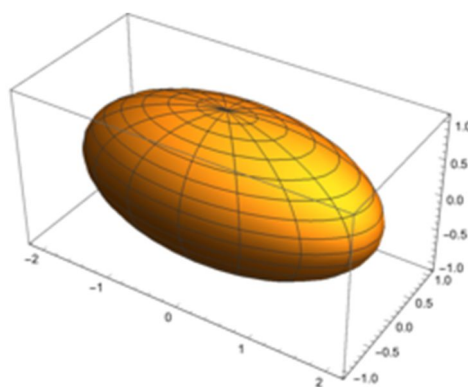
これらの研究結果は、論文にまとめて数学の学術雑誌である Transaction of the American Mathematical Society に投稿し、最終的には受理された。

#### (B) 空間 3 次元以上における結果

空間 3 次元またはそれ以上の場合は、閉曲面になるための条件が難しいため、2 次元のように解析をすることができなかった。この問題は Christoffel 問題と呼ばれる微分幾何の問題と深く関係しており、本研究を進める上でより深い研究の知識が必要となることが予想された。そこで、本研究では、最初のステップとして軸対称なスポット解を見つけることから解析を始めることにした。その結果、2 次元の結果と類似した以下の結果を得ることができた：

(1) 外力が正值であれば、スポット状の進行波解は一意的に存在する。(2) 外力が負値であれば、スポット状の進行波解は存在しない。(3) スポット解の形状は全て凸で、不安定である。

2 次元の場合は、外力が符号変化しても解析をすることができたが、3 次元以上になるとわからなかった。なお、これらの結果は現在論文にまとめて学術雑誌に投稿する予定である。



(軸対称なスポット解のイメージ)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiroshi Matsuzawa, Harunori Monobe, Masahiko Shimojo, Eiji Yanagida	4. 巻 1
2. 論文標題 Convergence to a traveling wave in the logarithmic diffusion equation with a bistable nonlinearity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 125-151
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Harunori Monobe, Hirokazu Ninomiya	4. 巻 20
2. 論文標題 Compact traveling waves for anisotropic curvature flows with driving force	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of The American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2447-2477
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8168	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirofumi Izuhara, Harunori Monobe, Chang-Hong Wu,	4. 巻 82
2. 論文標題 The formation of spreading front : the singular limit of three-component reaction-diffusion models	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Biology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00285-021-01591-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 H. Guo and H. Monobe	4. 巻 -
2. 論文標題 V-shaped fronts around an obstacle	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 17件 / うち国際学会 11件）

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 結晶粒界溝の成長に関連する界面方程式の解の挙動
3. 学会等名 楕円型・放物型微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 Fisher-Stefan モデルの反応拡散系近似とその周辺について
3. 学会等名 神戸解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Singular limit of a mathematical model related to controlling invasive alien species
3. 学会等名 Society for Mathematical Biology 2021（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Fast reaction limit of three-components reaction-diffusion systems and free boundary problems describing population dynamics
3. 学会等名 Interfacial Phenomena in Reaction-Diffusion Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Fast reaction limit of a three-components Lotka-Volterra competition-diffusion system
3. 学会等名 `An online conference on mathematical biology'' ReaDiNet (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Fisher-Stefan problems and the singular limit of reaction-diffusion systems
3. 学会等名 Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 Fisher-KPP model and Fast reaction limits of RDs
3. 学会等名 京都駅前セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Behaviour of solutions to an interface equation with exponential curvature
3. 学会等名 2019 International Workshop on PDEs and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 On a fully nonlinear parabolic equation related to a groove profile in crystal grain regions
3. 学会等名 Qualitative Theory on Nonlinear Partial Differential Equation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 On the behaviour of solutions to an exponential type curvature equation
3. 学会等名 ICIAM 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 On a fully nonlinear parabolic equation with prescribed contact angle
3. 学会等名 Mini-workshop on Nonlinear Diffusion problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 On compact traveling wave for a mean-curvature flow with driving force
3. 学会等名 2019 SIAM Conference on Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 指数型非線形性を持つ曲率依存方程式の解の挙動について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 個体群動態に関連する移流項を伴う自由境界問題の解析
3. 学会等名 第2回はこだて現象数理研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Compact traveling waves for a curvature flow with driving force
3. 学会等名 2018 China-Japan Workshop on Nonlinear Diffusion Problems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Harunori Monobe
2. 発表標題 Compact traveling wave solutions to curvature flows with a driving force in $\mathbb{R}^3$
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 外力を持つ平均曲率流方程式の進行波解の存在
3. 学会等名 非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 外力付き平均曲率流方程式のコンパクトな進行波解
3. 学会等名 なかもず解析セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 外力付き平均曲率流方程式のコンパクトな進行波解について
3. 学会等名 HMMC セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 物部治徳
2. 発表標題 外力を持つ平均曲率方程式のコンパクトな進行波解
3. 学会等名 松江セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------