

令和 5 年 6 月 22 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13463

研究課題名（和文）不均一性をもつ双安定な反応拡散方程式における局在解のダイナミクスの解明

研究課題名（英文）Pulse dynamics in bistable reaction-diffusion systems with spatio-temporal heterogeneity

研究代表者

西 慧 (Nishi, Kei)

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号：40774253

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：反応拡散方程式における空間局在解（パルス解やスポット解）の振る舞いを数値計算と解析の両面から包括的に調べた。縮約などの解析手法や分岐解析ソフトなどを用いた解析を行うことで、パラメータに依存したパルス解の挙動の変化や背後にある解構造だけでなく、ジャンプ型やバンプ型の空間非一様性との相互作用、あるいは局在解同士の集団のダイナミクスにおける新規ダイナミクスも発見し、そのメカニズムを分岐理論の観点から明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間的に局在し、かつ自発的に動き回るパターンは自然界に数多く見られる。自発的な運動をする局在パターンはアクティブマターと総称され、近年盛んに研究されている。反応拡散方程式においても、パルス解やスポット解のように空間的に局在化したパターンが現れ、アクティブマターと似た振る舞いも多く見られる。定常解や進行解を中心に多くの結果が得られているが、より複雑なダイナミクスやそのメカニズムは不明な点が多い。本研究では新規ダイナミクスの探索とそのメカニズム解明により、局在解の研究に新たな知見を与え、さらにアクティブマターの駆動機構にも示唆を与え、普遍的な数理構造を明らかにする。

研究成果の概要（英文）：The dynamics of localized patterns in a bistable reaction-diffusion system was studied from a viewpoint of the bifurcation theory.

研究分野：応用数学

キーワード：反応拡散方程式 パターン形成 界面ダイナミクス 分岐理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

反応拡散方程式には縞模様や迷路状パターン、ラセン波など、様々なパターンが解として現れるが、なかでもパルス解やスポット解のように空間的に局在化した解(局在解)は反応拡散系に限らず多くの散逸系で見られる普遍的なパターンであり、パラメータの値に応じて一定速度での進行や脈動といった自発的な運動がしばしば見られる。このような局在解については、定常解や進行解、脈動解を中心に解析が進められているが、その他の挙動やそれらのパラメータ依存性については不明な点も多い。さらに、媒質の不均一性や局在解間の相互作用などが加わることでダイナミクスはより多彩になるが、その全容や背後にある解構造は多くが未解明のままである。研究開始時点で、2種(3種) FitzHugh-Nagumo 方程式や Gray-Scott モデルなどの単安定系(単安定となるパラメータ領域)に現れる局在解(パルス解やスポット解)のダイナミクスについて、進行パルスや進行スポット同士の衝突、あるいは進行解と不均一性の相互作用により生じるダイナミクスや、その分岐理論的なメカニズムが調べられていた。一方、双安定系で見られる局在解は急峻な界面を持ち、界面の移動と界面間相互作用による複合的なダイナミクスが現れる。そのダイナミクスについては、2種 FitzHugh-Nagumo 方程式を中心に定常解や進行解、脈動解の存在や安定性、一様場での界面の変形ダイナミクスなど調べられていたが、局在解と不均一性との相互作用、あるいは局在解同士の相互作用によるダイナミクスについてはほとんど研究が行われていなかった。

2. 研究の目的

双安定な反応拡散方程式に現れる局在解(空間1次元のパルス解、および空間2次元のスポット解)のダイナミクス、およびそのメカニズムを力学系理論、とりわけ分岐理論の観点から明らかにする。具体的には、解の振る舞いのパラメータ依存性の詳細な解明、進行解と空間不均一性との相互作用、あるいは局在解同士の相互作用により現れるダイナミクスを数値計算と解析の両面から包括的に明らかにする。また、得られた結果から、反応拡散系をベースとするアクティブマターのモデル方程式や、複素 Ginzburg-Landau 方程式、Swift-Hohenberg 方程式などで見られる局在パターンとの共通点、差異を分岐理論の観点から明確にする。

3. 研究の方法

反応拡散方程式(PDE)の直接数値計算によるダイナミクスの詳細な探索を行い、パラメータによるダイナミクスの変化や分岐点の特定を行う。それらの振る舞いを解析的に調べるため、パラメータの微小性を利用した特異極限により方程式の1成分を界面方程式へと縮約する。さらに、複雑な挙動の解析をより容易にするために、界面の移動速度が遅いという仮定のもと、多重スケール法、中心多様体縮約などの手法により、パルス界面やスポット解の運動を記述する方程式(ODE)を導出し、解析を行う。これにより、それぞれの界面の複雑な挙動を捉えることが可能になり、解析やパラメータ空間の探索も大幅に容易になる。これら縮約ODEの解析や分岐解析ソフトを援用した詳細な数値計算などを組み合わせることで、元のPDEでみられる局在解の性質を解析的に調べ、振る舞いの背後にある解構造を明らかにする。

4. 研究成果

3変数 FitzHugh-Nagumo 型反応拡散方程式に焦点を当て、その界面ダイナミクスを明らかにした。

(1) パルス解の解構造

時定数 τ や、アクティベーター (u 成分) に含まれる3つのパラメータ (α , β , γ) の値を変え、双安定領域内でのパラメータ探索を行い、(i) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, (ii) $\alpha > 0$, $\beta < 0$, (iii) $\alpha < 0$, $\beta > 0$ のそれぞれの場合で PDE の詳細な数値計算を行った。中でも、(ii) $\alpha > 0$, $\beta < 0$ という条件下では、(i) や (iii) の場合とは異なり、解のプロファイルが上下反転した2種類のパルス解が共存し、時定数を変えたときにみられるこれらの解の振る舞いも、パラメータ τ の符号によって変わることが詳細な数値計算により明らかになった。このような違いが起こるメカニズムを調べるため、パルス界面の運動を記述する3次元の常微分方程式(ODE)を導出し、その解析を行った。その結果、まず $\tau = 0$ の場合は、進行パルス解の複合分岐が解構造の違いに大きく関わっていることが分かった。また $\tau < 0$ では $\tau = 0$ にはない新たな定常パルス解、および進行パルス解が出現することで、分岐構造が大きく変わることも分かった。さらに、進行解の分岐枝上にサドルノード分岐点とホップ分岐点が重なる複合分岐点が現れるなど、(i) や (iii) の場合に比べ、分岐構造もより多彩になることが分かった。これら縮約方程式から得られるパルス解の大域的な分岐構造をもとに、PDE でみられる上記の数値計算結果のメカニズムを説明した。

(2) パルス解の集団ダイナミクス

(ii) >0 , <0 というパラメータ条件下では、パルス界面間に引力相互作用が働き、複数個のパルス解がクラスターを形成する。これらクラスター集団によるダイナミクスのうち、複数のパルス解が連結し一定速度で進行する進行クラスター解に注目し、その分岐構造や進行速度の分散関係について調べた。(1)の縮約手法を拡張し、集団を構成するパルス界面の運動を記述する $(4N-1)$ 次元 (N はパルスの個数) の ODE を導出し、解析を行った。まず、縮約の結果、界面間には長距離では引力、短距離では斥力が働くことが分かり、従来の双安定パルス解や振動型テールのパルス列とは異なるメカニズムにより連結パルス解が形成されることが明らかになった。また、時定数 τ や ϵ が十分大きければ、進行クラスター解は連結するパルスの個数によらず安定であるが、パラメータの値を下げていくことで Hopf 分岐により不安定化し、よりパルスの個数が少ない進行クラスター解へと遷移することが分かった。特に、パラメータの値に応じて連結するパルスの個数にも上限があることが明らかになった。また、異なる進行クラスター解同士の相互作用方程式を導出し、2つの進行クラスター解が時間とともに近づき最終的に合体するか、あるいは無限遠へと離れていくかは初期時刻におけるクラスター間の距離で決まることも分かり、その閾値の具体的な関数形を与えた。

(3) 空間非一様媒質中でのパルスダイナミクス

進行パルス解と、ジャンプ型やバンプ型の空間不均一性との相互作用について、時定数 τ (パルスの速度に対応) やジャンプの高さ、バンプの幅などを変えながら数値的な探索を行い、振る舞いの分類を行った。中でも、脈動パルス解が非一様性のある方向へと移動し、トラップされながらカオス的な界面振動を起こす様子が広範なパラメータ領域で見られることが分かり、そのメカニズムを解析的に調べるため、中心多様体縮約により脈動パルス解の動きを記述する 3 次元常微分方程式 (Hopf 分岐の標準形とパルスの並進運動が結合した系) を導出し、数値計算で見られる振る舞いが再現されることを確かめた。

(4) 空間 2 次元で見られる界面の運動方程式の導出

空間 2 次元では 2 つの安定な状態を分ける界面(フロント解)や空間的に局在化したスポット解などが現れる。このような解の存在や安定性、ダイナミクスを解析的に調べるため、まず方程式の u 成分に含まれる微小パラメータ ϵ を 0 にする極限(時定数と界面幅が非常に小さいという極限)を考えることで、 u 成分の方程式を界面(1次元曲線)の運動方程式へ縮約した。次いで、界面の運動が遅く、曲線上の各点で曲率が十分小さいという条件のもと、残りの v 成分と w 成分の解も摂動的に構成し、界面の曲率と法線速度に関する方程式(積分微分方程式)を導出した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Muneyuki Matsuo, Katsunari Yasuda, Kei Nishi, Masakazu Kuze, Hiroyuki Kitahata, Yasumasa Nishiura, Satoshi Nakata	4. 巻 127
2. 論文標題 Originating point of traveling waves on a spherical field dependent on the nature of substrate surface	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Journal of Physical Chemistry A	6. 最初と最後の頁 1841-1847
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1021/acs.jpcc.2c08041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kei Nishi, Yasumasa Nishiura, Takashi Teramoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Reduction approach to the dynamics of interacting front solutions in a bistable reaction-diffusion system and its application to heterogeneous media	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physica D	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physd.2019.03.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 0件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 西 慧
2. 発表標題 3種反応拡散方程式のパルスダイナミクスについて
3. 学会等名 日本数学会2023年度春季年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kei Nishi
2. 発表標題 Pulse bifurcations in a three-component FitzHugh-Nagumo system
3. 学会等名 ReaDiNet2023（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 3種反応拡散方程式のパルスダイナミクスについて
3. 学会等名 日本数学会2023年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kei Nishi
2. 発表標題 Pulse bifurcations in a three-component FitzHugh-Nagumo system
3. 学会等名 ReaDiNet2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西慧、西浦廉政
2. 発表標題 3種反応拡散方程式でみられる進行連結パルス解の相互作用と遷移ダイナミクスについて
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 3種反応拡散方程式でみられるパルス解の分岐構造と遷移ダイナミクス
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 非一様性をもつ 3種反応拡散方程式における双安定パルス解のダイナミクス
3. 学会等名 第2回はこだて現象数理研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 双安定な反応拡散方程式におけるパルスダイナミクス
3. 学会等名 岡山解析セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 双安定パルス解の非一様媒質中でのダイナミクス
3. 学会等名 第2回松江数理生物学・現象数理学ワークショップ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 ジャンプ型非一様性をもつ3種反応拡散方程式における双安定パルス解のダイナミクス
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西慧
2. 発表標題 非一様性をもつ双安定反応拡散系におけるパルスダイナミクス
3. 学会等名 現象と数学 in 宮崎
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kei Nishi
2. 発表標題 Interface dynamics of a pulse solution in a three-component reaction-diffusion system with jump-type heterogeneity
3. 学会等名 Second Joint Australia-Japan workshop on dynamical systems with applications in life science (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 西 慧
2. 発表標題 ジャンプ型非一様性をもつ3種反応拡散方程式における双安定パルス解のダイナミクス
3. 学会等名 日本数学会2019年度春季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------