様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2018～2021
課題番号：１８Ｋ１８７０７

研究課題名（和文）p進群の超特異表現

研究課題名（英文）Supersingular representations of p-adic groups

研究代表者
阿部　紀行（Abe, Noriyuki）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：００５５３６２９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,900,000円

研究成果の概要（和文）：整数論における重要問題の一つとしてLanglands対応がある．このLanglands対応，その中でも法p Langlands対応に対して，簡約群の法p表現を調べることを通じて貢献をすることを目的として本研究を行ってきた．特に，超特異表現と呼ばれるクラスの表現が現状殆ど理解できていないため，これに対する知見を増やすことが目標であった．本研究では，超特異表現を調べる際に重要であると思われる簡約群の代数的な表現に関していくつかの知見を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Langlands対応は整数論に始まり，表現論や数理物理など多くの分野と関連し現在では巨大な理論として多くの研究者により研究が行われてきている．また，簡約群の代数的な表現論も近年急速な発展を見せており，注目されている理論である．本研究はこれらの理論，特に後者に対して，主に組み合わせ論的な側面から新たな知見を与えることができた．関連する研究が他の研究者により行われたことを考えても，一定の学術的意義のある結果を得ることができた．

研究成果の概要（英文）：Langlands correspondence is one of the most important problems in number theory. The aim of this project is, by studying modulo p representations of reductive groups, to make a contribution to Langlands correspondence, especially modulo p Langlands correspondence. Among modulo p representations, a class called supersingular representations are still mysterious and I tried to study such representations, I got some results on algebraic representations of reductive groups which is important to study supersingular representations.

研究分野：表現論

キーワード：超特異表現　簡約群

１．研究開始当初の背景

代数体の Galois 群の表現と保型表現の対応，またはその局所版として局所体の Galois 群の表現と既約許容表現との対応を主張する Langlands 対応は，その理論の壮大さ，応用の幅広さから，整数論，表現論における大問題の一つとして多くの研究者により調べられている．もともとは複素数体上の表現の対応を主張するものとして定式化され，多くの研究が行われてきた．一方，その変種として，p進体の場合に標数pの体の上の表現の対応を主張する，局所法p Langlands 対応が今世紀に入る頃から考えられてきた．もともとの理論と比べて，一般的にはまだ定式化もされていないなど，まだまだ未熟であり今後の発展が見込まれる理論である．

この局所法p Langlands 対応の簡約群の表現論サイドが本研究計画の研究対象である．特に，簡約群の既約許容法p表現の分類を一つの目標として定める．$GL_2(\mathbb{Q}_p)$の場合にはこの分類は完成されており，この場合には局所法p Langlands 対応も満足いく形で確立されている．しかし，完全な結論が得られているのは本質的にこれと同等な場合のみである．

一般に，簡約群の表現に対して放物型誘導という構成方法がある．これは法p表現に限らず様々な設定で可能な強力な構成法であり，法p表現においてもその強力さは変わらない．ただ，これによりすべての表現が得られるわけではない．そこで，放物型誘導により得られない既約表現を超尖点表現と呼ぶ．これらの概念により，既約許容表現の分類を超尖点表現の分類と，そこから放物型誘導で得られる表現の解析にわけることができる．

後者については，まず$GL_2(F)$（ただしFはp進体）の場合に Barthel-Livné により解決され，さらに Herzig により$GL_n(F)$の場合に拡張された．その後様々な部分的な結果を得て，私と F. Herzig，G. Henniart および M.-F. Vignéras により一般の簡約群に対して満足いく形での解決がなされた．

従って既約許容表現の分類は超尖点表現のそれに帰着される．しかし，既約許容超尖点表現の分類については現状$GL_2(\mathbb{Q}_p)$の場合を除き完成されている場合はなく，それどころか殆どその様子は理解されていないといってよい．いくつかの性質や，また特別な性質を満たす既約表現の存在が証明されていたりはするが，応用上必要なレベルの理解まではほど遠い．

２．研究の目的

本研究計画では，この超尖点表現の一つを具体的に構成することを目標とする．先に述べたとおり，超尖点表現については特別な性質を満たす表現の存在が知られていたり，また任意の簡約群は既約許容超尖点表現を持つことが示されている．しかし，それらの証明は途中に選択公理を挟むなど超越的な構成に依っており，できあがった既約表現がどのようなものであるかは見えにくい．そこで，本研究では既約超尖点表現のより具体的な構成を得ることを目標とした．

３．研究の方法

Paškūnas は$GL_2(F)$の場合にとある既約許容超尖点表現が存在することを，Bruhat-Tits 樹木上の係数系を用いて証明した．その後様々な既約超尖点表現の存在が示されたが，その証明はほぼこの Paškūnas による方法を踏襲している．そこで，Paškūnas の方法をより詳細に解析することで具体的な構成を行う．

４．研究成果

$K = GL_2(\mathcal{O})$（ただし$\mathcal{O}$は考えているp進体の整数環）と自然数m に対してK^m上の関数からなる空間$\mathcal{F}$を考える．Paškūnas はここに$G = GL_2(F)$の作用を定め，うまい部分表現を得ることで既約超尖点表現を構成した．ただし，$\mathcal{F}$へのG作用の入れ方や，部分表現のとり方は多くあり，適切な作用や部分表現をとる必要がある．

まずはKの元を具体的にとることで，$\mathcal{F}$のK表現の構造をもとにしてGの作用などを具体的に見ることを試みた．これについて，最初にとった元があまり難しくない形の時にはいくつかの具体的結果を得ることができたが，まとまった結果となるような計算はできなかった．これは$\mathcal{F}$の構造自身が複雑なためであり，やはり何かしら体系立った理論を背景とした手法が必要であるとこれらの計算を通じて感じた．

そこで，さらにK表現としての構造を効果的に使うことを試みた．特にKの商である$GL_2(\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})$（$\varpi$は$\mathcal{O}$の極大イデアルの生成元）の表現論が，Paškūnas らの以前の計算からしても重要であると思われた．そこで，この群の表現論を調べることとした．$GL_2(\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})$の既約表現は$GL_2$の代数的な表現の制限により得られる．近年，Williamson らにより正標数における簡約群の代数的な表現の理論が進んでいるという追い風もあった．近年の研究では Hecke 圏と呼ばれる圏が重要であり，正標数の代数群の代数的な表現の組み合わせ論的な部分がこの Hecke 圏により統

制されることがわかってきている.

そこで私は一般に簡約群の Frobenius 核の表現論を考察した. 簡約群の Frobenius 核はもとの簡約群の表現の, 特に既約表現に関する部分の情報をある程度保っており, その表現圏を調べることは簡約群の表現圏を調べるのに有効である. この Frobenius 核の表現圏 (正確には Frobenius 核と極大トーラスの作用を同時に考えた表現の圏) には Andersen-Jantzen-Soergel による組み合わせ論的な記述がすでに存在する. 私はこの組み合わせ論的記述をさらに Hecke 圏に近い形での記述に書き換えることにより, Frobenius 核の表現圏の主ブロックに Hecke 圏が作用することを示した. この結果については論文としてまとめ現在投稿中である.

さらに Frobenius 核の表現圏を調べるために, その Koszul 双対について考察した. Beilinson-Ginzburg-Soergel により圏$\mathcal{O}$の Koszul 双対性が発見されて以降, その形は表現論における様々な場所で発見されている. 代数群の表現圏においても Achar-Makisumi-Riche-Williamson により Koszul 双対性が発見されており, 彼らはそれの系として傾加群の指標公式を証明した. 私は Frobenius 核の表現圏の Koszul 双対がモーメントグラフの理論により記述されるのではないかと思い, その定式化・証明を試みた. 全体としての定理の形とその証明はある程度整ったものが見えてきたのだが, 細かい部分の問題が解決仕切れず, 補助事業期間中に完成した結果を出すことはできなかった.

当初の目標であった超尖点表現の具体的な構成を行うことはできなかったが, 代数群の代数的な表現, 特に Frobenius 核の表現論に関して思いがけない進展を得ることができた.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Noriyuki Abe	４．巻 13
２．論文標題 A comparison between pro-p-Iwahori Hecke modules and mod p representations,	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Algebra & Number Theory	６．最初と最後の頁 1959-1981
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/ant.2019.13.1959	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　3件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 阿部紀行
２．発表標題 On Soergel bimodules
３．学会等名 2019年度RIMS共同研究(公開型)「表現論とその周辺分野の進展」
４．発表年 2019年

１．発表者名 Noriyuki Abe
２．発表標題 A Hecke action on G_1T-modules,
３．学会等名 Modular Representation Theory（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 阿部紀行
２．発表標題 On Soergel bimodules
３．学会等名 Arithmetic Geometry and Representation Theory
４．発表年 2019年

１．発表者名 Noriyuki Abe
２．発表標題 On Soergel bimodules
３．学会等名 Geometry and representation theory（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Noriyuki Abe
２．発表標題 On Soergel bimodules
３．学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関