

令和 3 年 5 月 12 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2020

課題番号：18K18710

研究課題名（和文）代数体上のマッケイ対応の探求

研究課題名（英文）The McKay correspondence over number fields

研究代表者

安田 健彦（Yasuda, Takehiko）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30507166

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題は、代数体や関数体などの大域体と呼ばれる体上でのマッケイ対応の研究を目指していた。得られた研究成果は主に、大域体上のマッケイ対応自身よりも、その研究で重要な役割を担うであろう局所体上のマッケイ対応の理解の深化に関するものとなった。標数 p の体上で p 冪位数巡回群によるマッケイ対応や非線形作用に対するマッケイ対応や冪級数体のガロア拡大のモジュライ空間の構成に関する結果を得た。また、関連する手法を用いて、任意標数において2次元KLT特異点の局所基本群の有限性を示すことができた。研究期間中に国際研究集会を2つ開催し、研究情報の共有を促進した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大域体や局所体のような数論的体上のMcKay対応を研究することで、整数論と特異点論を結び新しい橋をかけることが期待できる。整数論と特異点論は、それぞれ整数と特異点という非常に基本的な研究対象を扱うため、様々な研究分野と関連する重要な分野である。本研究課題は、この2つの研究領域の融合分野に関するものだったが、得られた成果により両分野の結びつきをより強くすることができた。

研究成果の概要（英文）：This research was aimed at studying the McKay correspondence over global fields, that is, number fields and function fields. Obtained results are mainly, not the McKay correspondence over global fields itself, but deepening our understanding of the McKay correspondence over local fields, which would play an important role to study the case of global fields. We obtained results about the McKay correspondence for cyclic group of prime power order and the McKay correspondence for non-linear actions as well as about the moduli space of Galois extensions of a power series field. By closely related methods, we obtained also the finiteness of local fundamental group of 2-dimensional KLT singularities in arbitrary characteristic. We held two international workshops and promoted sharing of research information.

研究分野：代数幾何学

キーワード：マッケイ対応 非線形作用 局所体 KLT特異点 p 冪位数巡回群 モジュライ空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は以前の研究において、野性マッカイ対応という興味深い現象を発見し、研究を積み上げていた。これにより、整数論と特異点に関連することが見えてきていた。この理論は、 p 進数体やベキ級数体などの局所体の上のマッカイ対応の理論とみなすこともできる。これに対し、大域体、特に代数体を考えたらどうなるかを問うのは自然な問いである。研究代表者はこの問題を考察し、有理点の分布に関する Batyrev-Manin 予想と代数体の分布に関する Malle 予想という別々に研究されてきた二つの重要な予想が関連することを観察していた。

2. 研究の目的

代数体を始めとし、 p 進数体、ベキ級数体、関数体、などの「数論的体」の上でのマッカイ対応を研究し、整数論と特異点論の間に見えてきた関係をより強固なものにすること、そして、そこで得られた知見を応用し、特異点や整数論に関する結果を証明することが本研究課題の目的である。

3. 研究の方法

局所体や大域体を重みを付けて数え上げることがマッカイ対応で重要な役割を果たす。したがって、この重み付けを与える v 関数の計算が重要だが、この計算が難しい。標数 p の体上で位数が p 冪の巡回群の表現を考えたときの v 関数を研究協力者の丹野真人氏と共同で研究する。また、その計算を付随する商特異点の研究に応用する研究を、一部は同氏と共同で行い、一部は同氏へ依頼する。また、マッカイ対応のモチーフ版を得るために必要となるベキ級数体の拡大のモジュライ空間の構成を、Fabio Tonini 氏との以前からの共同研究を継続する形で推進する。非線形作用を内在的に調べる方法に困難があったが、これを取り除き非線形作用に対するモチーフ的マッカイ対応を得る研究を研究代表者が行う。また、Javier Carvajal-Rojas 氏と共同で、モチーフ的マッカイ対応の研究で用いた手法を KLT 特異点の局所基本群の研究に応用する。また、研究集会やセミナーの開催により、関連分野の研究者と情報交換を緊密に行うことで、新しい視点や研究手法を取り入れるとともに、本研究で得られた研究成果が周辺分野で活用されることを促進する。

4. 研究成果

(1) 丹野真人氏との共同研究で、標数 p において位数 p 冪の巡回群に対する v 関数の公式を与えた。位数が p の n 乗の場合、冪級数体のガロア拡大に対し、分岐ジャンプと呼ばれる n 個の値が定まる。 v 関数の値を分岐ジャンプと与えられた群の表現の直和因子の次元で表す公式を得た。例えば、表現が直既約で d 次元、分岐ジャンプが l_0, \dots, l_{n-1} のときは以下の式で v 関数が与えられる。

$$\sum_{\substack{i_0, \dots, i_{n-1} \in \{0, 1, \dots, p-1\} \\ 0 \leq i_0 + pi_1 + \dots + p^{n-1}i_{n-1} < d}} \left\lceil \frac{i_0 p^{n-1} + i_1 p^{n-2} l_1 + \dots + i_{n-1} l_{n-1}}{p^n} \right\rceil$$

これは、 n が 1 の場合に研究代表者が以前に得た公式を一般化するものとなる。また、位数が p の 2 乗の場合に、付随する商特異点の性質の研究にこの公式を応用した。この応用については、その後の丹野氏の研究により一般の p 冪位数の場合に一般化された。これにより、表現に付随する商特異点が標準特異点や対数的標準特異点となるための条件が、表現から定まる n 個の不変量に関する n 個の不等式で表された。また、表現が直既約の場合には、次元に関する一つの不等式で表される条件を得た。

(2) Fabio Tonini 氏との共同研究で、ベキ級数体のガロア拡大 (より正確には有限群に関するトーサー) のモジュライ空間の構成を任意の有限群、任意の基礎体に対して行った。ここで、構成されたモジュライ空間は P スキームと呼ぶ、スキームよりも荒い構造を備えた空間となっている。 P スキームの理論構築のため、 sur (surjective) 位相、 lun (locally universally injective) 位相という 2 つの Grothendieck 位相を導入し、その基本性質も明らかにした。考える有限群がある形の半直積になる場合には、我々の以前の共同研究で Harbater 達の結果を一般化、精密化して、モジュライ空間をより精密化な形 (Deligne-Mumford スタックの極限) で構成していた。任意の群に一般化する際に登場する困難を克服するため、 sur 位相、 lun 位相、 P スキームなどの概念を導入する必要があった。また、同じ共同研究において、 v 関数が一般に局所構成的であることを示し、したがってモチーフ的マッカイ対応に登場する下の形の積分が well-

definedであることを示した。

$$\int_{\Delta_G} \mathbb{L}^{d-v}$$

(3) 研究代表者は非線形作用に対するマッカイ対応を Hom スタックを用いて内在的に調べる方法を考案した。この方法を用いて野性的 Deligne-Mumford スタックにモチーフ積分の理論を一般化し、その応用として非線形作用の場合も含む形でモチーフ的マッカイ対応を証明した。これは、研究代表者が以前に予想として提唱していたものを証明したものである。また、研究代表者の別の研究で、野性的でない Deligne-Mumford スタックに対して展開したモチーフ積分の理論を、より困難だが整数論的に興味深い野性的場合に一般化したものにもなっている。弦モチーフを用いて定式化されたモチーフ的マッカイ対応は、クレパンとな関係にある双有理同値な対数的スタック対 (Y, E) と (X, D) に対し、以下の等式により表される。

$$M_{st}(Y, E) = M_{st}(X, D)$$

(4) また、Javier Carvajal-Rojas 氏と共同で、モチーフ的マッカイ対応の研究で用いた、アークや弦モチーフを使う手法を応用し、KLT 特異点の局所基本群の有限性を証明した。この結果は、標数零では知られていたものであり、正標数でも部分的に知られていたが、今回の証明は任意標数で機能する新しい手法に基づいている。具体的には弦モチーフが準エタール被覆を取ったときに減少することと、弦モチーフの現象列が DCC(descending chain condition)を満たすことを示すという方針である。また、弦モチーフの減少を示すために、アークの持ち上げ不可能性に関する結果を得た。これは、Kerz-Schmidt や加藤の結果を改良するものとなっている。

(5) 研究期間中に二つの国際研究集会「高次元代数多様体の有理点」(2019 年、京都大学)と「Singularities and Arithmetics」(2020 年、東北大学)を開催し、研究情報の共有を促進した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The motivic McKay correspondence in arbitrary characteristics
3. 学会等名 The McKay correspondence, mutation and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 安田健彦
2. 発表標題 位数 p^2 の巡回群による商特異点
3. 学会等名 Singularity Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Quotient singularities via stringy motives
3. 学会等名 Quantum Math, Singularities and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Stringy motives and local fundamental groups of klt surface singularities in arbitrary characteristic
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence of arbitrary finite groups
3. 学会等名 月曜特異点セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 野性McKay対応概説 - 数論的視点と最新成果 -
3. 学会等名 第27回整数論サマースクール（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence for an arbitrary finite group
3. 学会等名 Interaction Between Algebraic Geometry and QFT（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence for an arbitrary finite group
3. 学会等名 RIMS & OIST Workshop: On the Problem of Resolution of Singularities and its Vicinity（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence for an arbitrary finite group
3. 学会等名 On the Problem of Resolution of Singularities and its Vicinity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

プレプリント:

(1) Mahito Tanno, On Convergence of Stringy Motives of Wild \mathbb{P}^n -Cyclic Quotient Singularities, arXiv:2101.06971

(2) Mahito Tanno and Takehiko Yasuda, The wild McKay correspondence for cyclic groups of prime power order, arXiv:2006.12048.

(3) Fabio Tonini and Takehiko Yasuda, Moduli of formal torsors II, arXiv:1909.09276.

(4) Takehiko Yasuda, Motivic integration over wild Deligne-Mumford stacks, arXiv:1908.02932.

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	丹野 真人 (TANNO Mahito)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Singularities and Arithmetics	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 高次元代数多様体の有理点	開催年 2019年～2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	the University of Florence			
スイス	EPFL			