

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K18713

研究課題名（和文）微分ホモトピー論の構築

研究課題名（英文）Building-up Differential Homotopy Theory

研究代表者

岩瀬 則夫（IWASE, Norio）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：60213287

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,900,000円

研究成果の概要（和文）：まず微分空間の圏に於いて新しい微分形式を定め de Rham の定理を証明した。これは本来の微分形式を用いては得られないものである。またこれを用いて滑らかなCW複体に対しては本来の de Rham の定理が成立することを導いた。次に経路の結合についての A 構造を解析する為に、 $(-\infty, 0]$ または $[1, \infty)$ 上で動かない経路のみを考察することで、「reflexive」な微分空間上では経路の結合が滑らかであることを示した。同時に「安定な結合」を導入し、一般の微分空間上でも経路の結合が滑らかとなることを示した。最後にすべての多様体を含む滑らかなCW複体の新たな概念を定式化した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分空間は通常は微分不可能と考えられる対象にも微分構造を導入して解析的な操作を可能にするもので、今後の理論の展開次第では数学全体に大きなインパクトを与えうるものだと考えます。特にホモトピー論に於いてはその基礎となる対象は連続性までしか考慮されて来ませんでした。微分空間を考えることによりこれらは【自然に】滑らかなものとみなされます。ただ、現状ではそういった読み替えの方法が幾通りもあり、その中で真に【簡明かつ自然】なものがあるのかについて知る必要があります。本研究では【簡明かつ自然】なものとしてホモトピー論と微分構造の間に橋を架けることを希求し、その幾つかについては達成できたと考えます。

研究成果の概要（英文）：First, we introduce a new definition of differential forms so as to obtain de Rham theorem in full generality, which can not be obtained using the genuine definition of diffeological differential forms. This also enables us to obtain the genuine de Rham theorem for smooth CW complexes. Second, to study A structure on a concatenation of paths, we first show the concatenation is smooth on a "reflexive" diffeological space, by restricting paths to satisfy the stability condition saying that paths are stable on $(-\infty, 0]$ and on $[1, \infty)$. We also introduce a "stabilised concatenation" to show that the concatenation is smooth in full generality. Finally, we introduce a new notion of a fat smooth CW complex which enables us to conclude that a manifold is a fat smooth CW complex.

研究分野：位相幾何学

キーワード：Diffeology Topology Homotopy Loop Algebraic Differential Complex

1. 研究開始当初の背景

- (1) ホモトピー論では連続写像を扱う関係上、圏としての指数法則の成立がその基礎の構築に於いて重要である。しかるに通常の位相圏は一般には指数法則を満たさず、そのため様々な work-around がとられていた。その中で岡山大の島川和久氏らにより単体全体のなす圏を基礎に据えた位相圏が指数法則だけでなく、局限操作に関しても閉じており、それ自体が微分空間の圏からの左随伴関手の『像』として与えられることが示された。
- (2) ホモトピー論が連続写像を基礎にしているという事実から、微分(位相)幾何学の問題に端緒をもつ問題以外の、真にホモトピー論に内在する問題には微分(位相)幾何学的な手法や考え方はほとんど役に立たないということは明らかな事実であるとして了解される。しかし、島川らの結果を逆に眺めた場合、ホモトピー論に内在する問題そのものに微分(位相)幾何学的な手法や考え方が導入できるのではないかと期待された。
- (3) ホモトピー論の初期に京大の戸田宏氏により与えられたループ空間のCW複体モデルは測地線の考えを取り入れて作られたように見えるものであり、上記の考え方と親和性が高いのではないかと期待された。
- (4) 東大の河野俊丈氏によるループ空間の de Rham コホモロジーの計算は、本研究の微分空間に非常に近い Chen 空間の構造に着目したものであり、ループ空間に上記の応用が可能となるのではないかと期待された。

2. 研究の目的

- (1) 全体的な目的はホモトピー論そのものを微分空間の圏で構築することである。
- (2) 個別の目的としては、背景を述べる際に挙げたループ空間のCWモデルを測地線の考え方から説明すること、および滑らかなCW複体に対して、そのループ空間を考え、その de Rham コホモロジーを微分位相幾何学的な手法を用いて記述することである。
- (3) 具体的な目標は一方で Mayer-Vietoris の完全列を整備して代数的位相幾何学の手法を導入可能とし、他方で滑らかなCW複体のアイデアを導入してこれが十分多くの空間を含むことを示すことが必要である。

3. 研究の方法

- (1) de Rham の定理が成立しないのは、微分形式が少なすぎるのが原因であると考えた。そこで逆に微分形式の全体を逆に大きくすることを考えた。
- (2) 通常の球体と球面を用いて滑らかなCW複体の概念を導入することを考えた。
- (3) 経路(あるいは単に路)の概念は位相空間の圏では単位閉区間からの連続写像であるのに、微分空間の圏では実数全体からの滑らかな写像である。ここではこれら間を取って、実数全体からの写像が $(-\infty, 0]$ と $[1, \infty)$ 上で安定な(動かない)ものを『路』と考えることとし、このアイデアにより両者を繋ぐことを考えた。
- (4) 可微分多様体の全体は広大な微分空間の中に於いて一つの充満部分圏をなしており特に重要な位置を占めると言える。同様に滑らかなCW複体も少なくともその近くの間所になければならないと考えた。その為、いくらかの試行錯誤を行い、最終的には nebula とこれにより定まる微分空間としての次元を重視し、可微分多様体の自然な一般化としての reflexive な微分空間にできるだけ近い場所にあることを要請する。

4. 研究成果

- (1) 微分形式を二つの関手の間の自然変換であるとみなし、それら関手の始域となる圏、特にその射の全体を小さく絞ることで、微分形式の全体を逆に大きくする一方、これを用いてすべての微分空間に対して疑似的な意味で滑らかな1の分割が存在することを示した。この新しい de Rham コホモロジーに対して、疑似的な1の分割を用いることで de Rham の定理を [II19] で証明した。
- (2) いかなる位相的なCW複体に対しても、これに位相的にホモトピー同値となる滑らかなCW複体を構成できることを [Iwa22b] で示した。ただし、残念ながら可微分多様体は滑らかなCW複体とならなかった。またここで導入した滑らかなCW複体は微分空間としての次元が有限にならないという問題が生じた。そこで「膨

れて滑らかなCW複体」の概念を定め、これが可微分多様体を含み、かつすべての位相的なCW複体が膨れて滑らかなCW複体に位相的にホモトピー同値となることを示せると考えている。

(3) 微分空間 X 上の路の全体 $\mathcal{P}(X)$ には自然に微分空間の構造が入り、 $\mathcal{P}(X) = C^\infty(\mathbb{I}, X)$ を満たす微分空間 \mathbb{I} を導入した。 \mathbb{I} はもちろん多様体ではないが、非常に簡明かつ自然な定義をもち、微分空間としての次元も 1 である。この \mathbb{I} を拡張する形で「cubic 複体」の概念を定め、Stasheff の A_∞ 構造を $\mathcal{P}(X)$ に [Iwa22a] で導入した。

<引用文献>

- [II19] Norio Iwase and Nobuyuki Izumida. Mayer-Vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces. In *Algebraic topology and related topics*, Trends Math., 123–151. Springer, Singapore, 2019.
- [Iwa22a] Norio Iwase. Smooth A_∞ form on a diffeological loop space, 07 2022. arXiv preprint, <https://arxiv.org/abs/2207.08402>.
- [Iwa22b] Norio Iwase. Whitney approximation for smooth CW complex. *Kyushu J. Math.*, 76(1):177–186, 2022.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Iwase Norio	4. 巻 -
2. 論文標題 Lusternik-Schnirelmann theory to topological complexity from \mathbb{A}_∞ -view point	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Topological Methods in Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 1~22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.12775/TMNA.2022.060	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 IWASE Norio	4. 巻 76
2. 論文標題 WHITNEY APPROXIMATION FOR SMOOTH CW COMPLEX	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 177~186
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.76.177	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio IWASE	4. 巻 -
2. 論文標題 Smooth \mathbb{A}_∞ -form on a diffeological loop space	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio IWASE	4. 巻 76
2. 論文標題 Whitney Approximation for smooth CW complex	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 177-186
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.76.177	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Norio IWASE, Nobuyuki IZUMIDA	4. 巻 -
2. 論文標題 Mayer-Vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Topology and Related Topics (Mohali, 2017), Trends in Mathematics, Birkhauser	6. 最初と最後の頁 123-151
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 岩瀬 則夫, 宮田 祐也
2. 発表標題 Topological spherical space form の位相的複雑さ -- Python を用いた決定 --
3. 学会等名 RIMS 共同研究: 「変換群論の新潮流」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩瀬 則夫
2. 発表標題 Smooth CW Complex
3. 学会等名 京都・九州・信州三大学合同トポロジーセミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Iwase, Norio
2. 発表標題 Further steps to differential homotopy theory -- A_{∞} -structures in Diffeology --
3. 学会等名 AMS-EMS-SMF meeting (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩瀬 則夫
2. 発表標題 その1. L-S カテゴリ数 -- A 理論から --
3. 学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩瀬 則夫
2. 発表標題 その2. 位相的複雑さ -- A 理論から --
3. 学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Iwase, Norio
2. 発表標題 Topological Complexity of S^3/Q_8 as a Linear Problem
3. 学会等名 Classifying spaces in homotopy theory: in honour of Ran Levi 's 60th Birthday (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Iwase, Norio
2. 発表標題 Smooth A_{∞} structure on a diffeological loop space
3. 学会等名 Topology Seminar at Aberdeen University (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩瀬 則夫, 宮田 祐也
2. 発表標題 Determination of Topological Complexity of S^3/Q_8 with python
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Norio IWASE
2. 発表標題 Whitney Approximation for Smooth CW Complexes
3. 学会等名 Seminar on diffeology and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Norio IWASE
2. 発表標題 Steps to the differential homotopy theory
3. 学会等名 Advances in Homotopy Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩瀬則夫
2. 発表標題 微分CW複体について
3. 学会等名 微分空間・トポロジーと組み合わせ構造
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

岩瀬 則夫 の 公表 文献 https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~iwase/Works/Building-up Differential Homotopy Theory https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~iwase/BDHT/Building-up Differential Homotopy Theory, 2020 https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~iwase/BDHT2/Building-up Differential Homotopy Theory, 2023 https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~iwase/BDHT3/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	栗林 勝彦 (Kuribayashi Katsuhiko)		
研究協力者	木原 浩 (Kihara Hiroshi)		
研究協力者	泉田 信行 (Izumida Nobuyuki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Building-up Differential Homotopy Theory	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Building-up Differential Homotopy Theory 2020 in Shinshu	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 Building-up Differential Homotopy Theory 2020 in Aizu	開催年 2023年～2023年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------