

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：34304

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K18717

研究課題名(和文) Holomorphic motionの一般化に見る複素多様体論の新たな視点

研究課題名(英文) A new perspective of complex manifolds from the view point of generalizations of holomorphic motions

研究代表者

志賀 啓成 (Shiga, Hiroshige)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：10154189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：正則運動はリーマン球面上の集合の単射写像のある複素多様体をパラメーター空間とする正則族として定義される。これに対し、正則運動の拡張可能性についてのChirkaの主張の反例を与え、さらにある種の位相的な自明条件を満たしていても、全平面の正則運動に拡張できない例を与えた。また、Klein群の極限集合や有理写像のジュリア集合を含む種々のカントール集合の擬等角同値性を考察し、一般化されたカントール集合が擬等角同値な場合にその最大歪曲度を評価した。さらに、一般化されたカントール集合が標準的な3分の1カントール集合と擬等角同値になるための必要十分条件を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

The holomorphic motion is a quite simple object in mathematics, that is, it is a holomorphic family of injections on a set in the complex plane. We have found various aspects on holomorphic motions and quasiconformal mappings.

研究成果の概要(英文)：Holomorphic motions are defined as holomorphic families of injections on subset of the Riemann sphere parametrized by complex manifolds. On this topic, we give a counter example to Chirka's statement, and also an example of a holomorphic motion which satisfies a kind of a topological trivial condition but can not be extended to a holomorphic motion over the Riemann sphere.

We find some conditions for generalized Cantor sets to be quasiconformally equivalent to each other.

We also give estimate maximal dilatations. A necessary and sufficient condition for a generalized Cantor set to be quasiconformally equivalent to the standard Cantor set is obtained. Those results imply that different Cantor sets are connected via holomorphic motions.

研究分野：Complex Analysis

キーワード：Holomorphic motion Quasiconformal mapping Riemann surface

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Holomorphic motion は 1980 年代に Mane-Sad-Sullivan の論文に初めて現れた. その論文において, リーマン球面の集合 E の holomorphic motion は E の閉包 \bar{E} の holomorphic motion に拡張できることを示した. この結果は複素力学系の安定性, 特に Julia 集合の構造安定性の議論に決定的な役割を果たした. その後この結果は飛躍的な発展を見せる.

まず, Bers-Royden によって, holomorphic motion のパラメータ空間の各点のある近傍では, その holomorphic motion はリーマン球面の holomorphic motion に拡張されることが示され, Slodkowski がパラメータ空間が単位円板 Δ であれば, Δ 全体をパラメータ空間とするリーマン球面 holomorphic motion に拡張できることを示した. また Earle-Kra-Krushkal は, Δ をパラメータ空間とする, あるクライン群 G で同変な E の holomorphic motion は Δ をパラメータ空間とする G -同変なリーマン球面の holomorphic motion に拡張できることを示した. 一方, Hubbard はパラメータ空間の次元が 2 以上であれば, 上記のような拡張は不可能であることを反例を上げて指摘した. さらに応募者は Jiang, Mitra, Wang との共同研究で holomorphic motion の一般化である quasiconformal motion に関する Sullivan-Thurston の主張に反例があることを発見し, その克服のための新たな概念として tame quasiconformal motion を定義し, その性質を明らかにしていた.

2. 研究の目的

holomorphic motion とはリーマン球面の部分集合の単射写像の正則族として定義される. その定義から, 簡明・素朴な数学対象である. しかし, 一方で, 大域拡張性を持ち, Teichmüller 空間論, Klein 群論, 1 次元複素力学系において極めて重要な働きをする. この状況に鑑みて, 本研究課題では以下を目的とする.

1. Holomorphic motion において考える集合 E を含む空間を一般化する.

2. パラメータ空間を高次元化し, 大域拡張性を論じる. パラメータ空間の次元が 2 以上であれば global に大域拡張性が成り立たない例が知られている. よって, 大域拡張性が成り立つような複素多様体の条件を求める.

3. 上記 2 の性質を持つ複素多様体は非常に望ましい特質を持っていると言える. そこで, この特質を複素多様体の持つ様々な性質, 概念と比較し, 複素多様体論の新しい研究方向を打ち立てる.

3. 研究の方法

実際の研究の実施は, 数学研究の通常の方法をとる. すなわち, インターネットも含めた文献による情報収集, 国内外の研究者との討論・意見交換などを通してアイデアを醸造して問題解決にあたる. このため, 専門書の購入とインターネットを利用などのための情報収集デバイスは必要である.

また, 国内外の出張及び研究者招聘を積極的に行い, この研究で得られた結果は研究集会などで発表して, 可能な限り広い分野の研究者と意見交換を行う.

4. 研究成果

正則運動はリーマン球面上の集合をパラメーター空間とする正則族であり、Bers-Royden の定理によってパラメーター空間の近傍はリーマン球面全体の正則運動として表現できることが分かっている。また、特に複素平面上の単位円板をパラメーター空間とする場合、Slodkowski の定理によってリーマン球面の正則族として表現できる。研究のテーマは、この結果を一般の正則運動にどのように拡張できるかである。まず、Chirka の主張に対して反例を示し、正則運動の拡張可能性について研究した。一般化されたコントロール集合の擬等角同値性や最大歪曲度の評価にも取り組み、異なるコントロール集合が擬等角同値になる条件を与え、従ってこの時、全平面の正則運動が存在することを示した。さらに、双曲複素力学系の Cantor 型ジュリア集合の擬等角同値性を無限型 Riemann 面の観点から証明した。この場合も正則運動の存在が示される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shiga Hiroshige	4. 巻 43
2. 論文標題 A note on the extendability of holomorphic motions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 162-169
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj/1584345692	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shiga Hiroshige	4. 巻 23
2. 論文標題 The quasiconformal equivalence of Riemann surfaces and the universal Schottky space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 189 ~ 204
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ecgd/343	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jiang Yunping, Mitra Sudeb, Shiga Hiroshige, Wang Zhe	4. 巻 70
2. 論文標題 Teichmüller spaces and tame quasiconformal motions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 607 ~ 631
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj/1546570827	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 志賀啓成
2. 発表標題 Quasi-circles and Dirichlet finite harmonic functions on Riemann Surfaces
3. 学会等名 静岡複素解析幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 志賀 啓成
2. 発表標題 Julia 集合の函数論
3. 学会等名 複素力学系理論の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 志賀 啓成
2. 発表標題 Dynamical Cantor sets and quasiconformal mappings
3. 学会等名 Teichmüller Theory: Classical, Higher, Super and Quantum (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 志賀 啓成
2. 発表標題 On dynamical Cantor sets and quasiconformal mappings
3. 学会等名 First Analysis Mathematica International Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 志賀 啓成
2. 発表標題 On dynamical Cantor sets and quasiconformal mappings
3. 学会等名 函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 黒川 信重、志賀 啓成	4. 発行年 2020年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 112
3. 書名 リーマンと解析学	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------