

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K18720

研究課題名(和文)メビウス変換のなす離散群の作用で不変なフラクタルにおけるラプラシアン解析学

研究課題名(英文) Analysis of Laplacians on fractals invariant under action of discrete groups of Moebius transformations

研究代表者

梶野 直孝 (KAJINO, Naotaka)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：90700352

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題における中心的な研究成果は、平面内のある範囲の自己等角フラクタル(適切な等角写像の族に関する自己相似性を有する平面内のフラクタル)に対して幾何的に自然なラプラシアン(の候補の一つ)を構築するとともに、その固有値の列のWeyl型漸近挙動をはじめとする詳細な性質を明らかにしたことである。

フラクタルの範囲は当初はKlein群(複素平面上のメビウス変換のなす離散群)の作用で不変な円詰込フラクタル(のいくつかの扱いやすい具体例)に限定されていたが、その後の研究で同様の結果を一般の(微分の一類の非自明性を満たす)等角写像の有限族の作用で不変な単純フラクタル曲線へと拡張することにも成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フラクタル上に自然なラプラシアンを構築し解析する研究は40年近い歴史を有するが、研究対象としては厳密な自己相似性もしくは比較的平易な組み合わせ論的構造を持つフラクタルが主であり、自己等角フラクタルのように一種の自己相似性は確かに持っているものの厳密に自己相似ではないフラクタルに対する研究はごく僅かしかなかった。

本科研究費研究課題の結果はそのようなフラクタルにおいて自然な解析学を展開することに成功していると言え、扱えるフラクタルの範囲はまだ限定的ではあるものの、既存の研究において取り上げられることの少なかった本質的な問題に一定の理解を与えたその意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：As the main results of this research project, for certain classes of self-conformal fractals in the plane (fractals in the plane which are self-similar with respect to suitable families of conformal maps), the principal investigator has constructed (candidates of) geometrically canonical Laplacians and revealed detailed properties of them including Weyl type asymptotic behavior of their sequence of eigenvalues.

At the beginning of this research project the class of fractals was limited to (some accessible concrete examples of) circle packing fractals which are invariant under the action of Kleinian groups (discrete groups of Moebius transformations on the complex plane). In the course of the more recent studies, however, the principal investigator has succeeded in extending the same line of results to planar simple fractal curves which are invariant under the action of finite families of general conformal maps (satisfying a certain condition on the non-triviality of the derivatives).

研究分野：フラクタル上の解析学・ポテンシャル論

キーワード：ラプラシアン フラクタル Weyl型固有値漸近挙動 Klein群の極限集合 Sierpinski carpet 自己等角フラクタル曲線 複素力学系のJulia集合 Klein群の擬等角変形

1. 研究開始当初の背景

(1)「フラクタル」とは「長さが無限大の曲線」のような、それ以前にはむしろ病的な事例とみなされていた滑らかでない構造を有する図形に対する呼称であり、B. B. Mandelbrot が著書『Fractal Geometry of Nature』(Freeman, 1982)においてその自然界における重要性を指摘して以来、フラクタルは自然科学の諸分野で普遍的に見出され理論・応用両面から盛んに研究されている。数学解析・確率論の分野では、熱や波動といった代表的な物理現象を厳密に記述し解析することを目標として、フラクタル上のラプラシアンや対応する拡散過程の構成と解析が1980年代後半以来進められてきた。

(2)当初は専ら Sierpinski carpet のような Euclid 自己相似フラクタル(厳密な自己相似性を有するフラクタル)におけるラプラシアンが構成・研究され、対応する熱核(拡散過程の推移確率密度)に対する劣 Gauss 型評価をはじめとする多数の結果が得られた。これを契機として「フラクタルを含む一般の測度距離空間上の拡散過程の熱核評価の研究」が活発化し、その発展により近年では様々な統計物理モデルに現れるランダムフラクタルでの熱拡散についても多くの例で劣 Gauss 型に近い形の熱核評価を得ることができるまでになった。しかしその反面、フラクタル上の解析学は一部の確率論の研究者と Riemann 多様体上の熱核評価の研究者だけが研究している特殊な分野という位置付けに甘んじており、エルゴード理論・複素力学系・Klein 群論・双曲群論などの数学の他の分野で自然に現れるフラクタルを対象とする解析学の研究が皆無に近いことを研究代表者の梶野は予めから問題視していた。

(3)そんな中、Klein 群(Riemann 球面上のメビウス変換のなす離散群)上のエルゴード理論の近年の急速な進展と、その主要な成果の1つとして得られた Klein 群の作用で不変な円詰込フラクタルにおける「半径 $1/a$ 以上の円の個数の a を無限大に近づけるときの漸近挙動がフラクタルの Hausdorff 次元と Hausdorff 測度により記述できる」という結果(Oh-Shah [Invent. Math. 187 (2012), 1-35])を耳にした。これを切っ掛けに、Klein 群の作用で不変なフラクタルにおいて幾何的に自然なラプラシアンを定義しその固有値について同様の漸近挙動を得ることを具体的な課題として検討し始め、古典的な円詰込フラクタルとしてよく知られている Apollonian gasket をはじめとする Klein 群の作用で不変な円詰込フラクタルのいくつかの具体的において幾何的に自然なラプラシアンを構成しその固有値の列の Weyl 型漸近挙動を証明した。ここでラプラシアンの定義が問題になるが、Apollonian gasket に対しては Teplyaev (2004)により「各座標軸への射影が調和関数になる」という意味で幾何構造を反映したラプラシアンの存在が既に知られており、さらに梶野がラプラシアンに対応するエネルギー形式の円詰込構造を通じた具体的表示式を示したことで詳細な解析と他の円詰込フラクタルへの一般化が可能になった、という状況であった。

2. 研究の目的

(1)本研究の目的は、上記のような方面の研究をさらに推し進めて、エルゴード理論・複素力学系・Klein 群論・双曲群論などの確率論以外の分野で現れる(非ランダムな)フラクタルを対象としてラプラシアンの構成と詳細な解析を行うことである。具体的にはひとまず、Apollonian gasket の場合に得られたエネルギー形式の具体的表示を一般化するという形でラプラシアンの定義が既に確立している円詰込フラクタルの場合に、このラプラシアンのより詳しい解析を行う。

(2)従前の梶野の研究の問題点としては例えば次の点が挙げられる：

- ① Apollonian gasket などの個別の具体例しか取り扱えていない。
- ② 有限分岐的(各構成単位同士の共通部分が有限集合)なフラクタルしか扱えていない。
- ③ Weyl 型固有値漸近挙動以外の、固有関数や熱核など重要な対象の詳しい性質が未知である。

そこで手始めにこの①, ②, ③の解決を図る。

(3)さらに将来的には、円詰込フラクタル以外のフラクタルにおける幾何的に自然なラプラシアンの構成、および Klein 群や複素力学系の族の収束に伴うラプラシアンの挙動の解析をも目標とする。

3. 研究の方法

(1)上記「2. 研究の目的」(1)で挙げた課題①, ②, ③のうち、①については等角写像で不変な自己相似フラクタルの1つの定式化として知られる conformal graph directed system の概念を用いて適切な枠組みを設定することにより、少なくとも梶野による既存の「ラプラシアンの固有値の Weyl 型漸近挙動の証明」を一般の「フラクタルが有限分岐的である場合」へと拡張することは可能だろうとの感触を既に得ていた。

(2)課題③については、梶野の未発表の結果であるが Apollonian gasket の場合には固有関数や熱核は連続であることが既に示せており、さらにこの結果は有限分岐的な場合(の一部)への一般化の見通しが既に立っていた。

(3)残る課題②については、Klein 群の作用で不変な円詰込フラクタルの重要な具体例として補集合の各連結成分が開円盤かつそれらの境界円同士が交わらないものが知られている。これは Sierpinski carpet と同相なので有限分岐的ではあり得ず、従って梶野の従前の研究での手法は通用しないが、エネルギー形式の具体的表示から導かれる熱核の粗い評価を円の配置の幾何的情報と合わせることで Weyl 型固有値漸近挙動の証明のために必要な解析は辛うじて可能らしいとの印象を得ている。

(4)以上の課題の解決と研究結果の普及のため、関連が見込まれる国内外の各地の研究集会に多数出席し研究発表と意見交換を行う。また特に Sierpinski carpet と同相なフラクタルは双曲群論との関連で活発に研究されていることを考慮し、その方面の研究の専門家を訪問あるいは招聘して意見交換を行い、さらに場合によっては共同研究を行う。

4. 研究成果

(1)まずラブラシアン⁽¹⁾の定義が既に確立している円詰込フラクタル、特にその中でも年度当初の時点では詳細な解析を行うことができていなかった、上記「3. 研究の方法」(3)で触れた Sierpinski carpet と同相な円詰込フラクタルのある重要な具体例に対して研究を行った。この場合には、本研究課題の交付内定よりも前に既にラブラシアン⁽¹⁾の固有値の Weyl 型固有値漸近挙動の証明が梶野の研究により得られており、その後さらに自然な体積測度に関しほとんど全ての点において、熱核の対角部分の短時間漸近挙動が 1 次元的であることを証明した。またこの場合や Apollonian gasket の場合を含む円詰込フラクタルに関する梶野の研究結果についての概説論文 1 編を 2021 年度に出版した。

(2)上記と並行して、初年度である 2018 年度には円詰込フラクタルではないような Klein 群の極限集合や複素力学系の Julia 集合に対しても幾何的に自然なラブラシアン⁽¹⁾の定義方法を見出すべく関連する既存の研究の精査を行い、等角写像の有限族の作用で不変な単純フラクタル曲線における幾何的に自然なラブラシアン⁽¹⁾の定義として妥当と思われるものを見出すことに成功した。その後、この種のフラクタル曲線の上の測度に対する既存の解析手法を詳細に検討することにより、想定していた方法でラブラシアン⁽¹⁾が実際に定義できること、対応する熱方程式の基本解（熱核）が劣 Gauss 型評価を受けること、および等角写像の有限族の微分の非自明性に関するある緩やかな条件の下で幾何的に自然な形の Weyl 型固有値漸近挙動が成り立つことを証明した。さらに等角写像の有限族が向きを保つメビウス変換だけからなるときには微分の非自明性に関する条件が満たされること、特に単純フラクタル曲線が純双曲的な有限生成第一種擬 Fuchs 群の極限集合である場合に Weyl 型固有値漸近挙動の結果が適用できることを証明した。等角写像の有限族の作用で不変な単純フラクタル曲線としては他に複素力学系の Julia 集合として現れるものが重要であり、その大半はやはり微分の非自明性に関する条件を満たしている（従って Weyl 型固有値漸近挙動の結果が適用できる）はずであるとの感触は得られたが、その証明には Julia 集合の幾何構造に関する非自明な考察が必要となることが見込まれ証明の完了には至らなかった。現時点での直近の課題はこの点の証明を完了することである。

(3)本研究課題の主題である幾何的に自然なラブラシアン⁽¹⁾の構成と解析は、本研究課題の開始時点では円詰込フラクタルの場合にしか見通しが立っておらずフラクタルが長さ無限大の曲線を含む場合にラブラシアン⁽¹⁾をどう定義するべきかは全く不明であったが、上記(2)の結果はこの点に本質的な進展をもたらすとともに幾何的に自然なラブラシアン⁽¹⁾の構成と解析が円詰込とは限らないより広範なフラクタルへと拡張できる可能性を示唆するものであり重要である。

(4)また以上の結果について国内外各地の研究集会で研究発表を行うとともに、関連分野の国内研究者の国外派遣や国外研究者の招聘を行い研究交流を図った。特に 2019 年 11 月に開催された第 62 回函数論シンポジウムで講演し関連分野の専門家らと意見交換を行った際、上記「4. 研究成果」(1)の研究で扱った Sierpinski carpet と同相な円詰込フラクタルの擬等角変形（元の Klein 群の擬等角変形として与えられる Klein 群の最小不変閉集合）で非自明な（元の円が長さ無限大のフラクタル曲線に変形された）ものが存在するための（Klein 群論においてよく知られている）条件についての知見を得た。これにより Klein 群の作用で不変かつ Sierpinski carpet と同相だが「円詰込でない」フラクタルの構成法について一定の理解が得られたことになり、そこで上記「4. 研究成果」(2)の研究の手法を適用することにより幾何的に自然と思われるラブラシアン⁽¹⁾の候補を定義できないか検討したが、様々な本質的困難があり現時点では解決の見通しは立っていない。この場合に同様の結果を得ることは今後の重要課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naotaka Kajino	4. 巻 87
2. 論文標題 The Laplacian on some self-conformal fractals and Weyl's asymptotics for its eigenvalues: A survey of the analytic aspects	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 293-314
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08710293	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 Geometric Laplacians on self-conformal fractal curves in the plane
3. 学会等名 French Japanese Conference on Probability & Interactions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 Geometric Laplacians on self-conformal fractal curves in the plane
3. 学会等名 Random Interacting Systems, Scaling Limits, and Universality - Week 3: Workshop on Random Interacting Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 The Laplacian on some self-conformal fractals and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 Topology and Dynamics Seminar at the University of Birmingham（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 The Laplacian on some self-conformal fractals and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 The 12th Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute (MSJ-SI): Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 The Laplacian on some self-conformal fractals and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 Research on the Theory of Random Dynamical Systems and Fractal Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶野 直孝
2. 発表標題 The Laplacian on some self-conformal fractals and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 第62回函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 The Laplacian on some round Sierpinski carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 9th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 The Laplacian on some round Sierpinski carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 Fractal Geometry and Stochastics 6 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶野 直孝
2. 発表標題 The Laplacian on some round Sierpinski carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 2018年度エルゴード理論とその周辺
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶野 直孝
2. 発表標題 The Laplacian on some round Sierpinski carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 2018年度確率論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶野 直孝
2. 発表標題 The Laplacian on some round Sierpinski carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 2018年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naotaka Kajino
2. 発表標題 Analysis of diffusions on self-similar and round Sierpinski carpets
3. 学会等名 Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶野 直孝
2. 発表標題 The Laplacian and Weyl's eigenvalue asymptotics on round Sierpinski carpets realized as the limit sets of certain Kleinian groups
3. 学会等名 2018年度リーマン面・不連続群論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶野 直孝
2. 発表標題 The Laplacian on some round Sierpinski carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues
3. 学会等名 2019年度日本数学会年会・幾何学分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Publications and preprints https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nkajino/publications.html 梶野 直孝 京都大学数理解析研究所 https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/kajino.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Analysis and geometry of fractals and metric spaces: Recent developments and future prospects	開催年 2023年～2023年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------