様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　８ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2018～2019
課題番号：１８Ｋ１９７８３

研究課題名（和文）isogeometric境界積分法は有効か

研究課題名（英文）An assessment of the efficiency of isogeometric boundary integral methods

研究代表者
西村　直志（Nishimura, Naoshi）

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：９０１２７１１８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：最近計算力学分野において，幾何形状と微分方程式の解の補間にNURBS関数を用いるisogeometric解析(IG法と呼ぶ)がさかんに行われているが，境界積分法におけるこの研究動向の有効性には疑問がある．本研究では従来のIG法の考え方に捉われず，その本質的な特性を生かして計算コストと精度のバランスの取れた数値計算法を開発することを目指す．具体的にはIG法とNystroem法との併用を試み，高精度の解法を得た．また，従来法では難しかったMaxwell方程式積分方程式の選点法による解法をIG法を用いて開発し，その有用性を示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は，従来CADとの連携等の本質的でない側面が強調されてきたisogeometric解析において，境界積分法の精度向上の立場から新しい視点を提供した．実際，幾何学形状と未知関数の基底関数の共通化に拘るより，要素のもたらす不要な特異性を除去することが重要であることを示した．この考え方に立って，isogeometric解析とNystroem法との併用という高精度の解法を得ることができた．また同様な考え方から従来困難であったMaxwell方程式の積分方程式の選点法による解法を得ることができ，電磁波解析の計算効率の向上に貢献した．

研究成果の概要（英文）：The isogeometric analysis, investigated actively in computational mechanics recently, utilises NURBS functions for both geometrical modelling and interpolation of the unknown functions. However, the significance of this approach in boundary integral methods needs to be carefully reexamined. This study discusses essential features of the isogeometric analysis which allow the development of boundary integral methods which can achieve the balance between the computational cost and the accuracy. Specifically, we combine the high quality geometric modelling used in isogeometric analysis with the Nystroem method to obtain a highly accurate solver of boundary integral equations. We also propose a collocation boundary integral method for Maxwell's equations based on the isogeometric analysis.

研究分野：計算科学

キーワード：isogeometric 解析　境界積分法　Maxwell方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

我々は，境界積分法の高速解法の研究に長年従事してきたが，大自由度の問題が解けるようになって分かったことは，境界の分割数を多くしても解析精度は意外に向上しないことである．特に超特異核を用いた積分方程式ではこの傾向が顕著である．これは，伝統的な低次の基底関数を用いると要素の境界で必ず何らかの不連続性が生じ，これに核関数の特異性が加わると，要素の境目に解の特異性が発生することに起因している．これがもっとも顕著に現れるのはクラック問題やMaxwell 方程式などに現れる超特異核を持った積分方程式の場合であり，困難な数値積分に要するコストの大きさは，得られる精度に見合っていないと言える．

一方，計算力学の分野では最近isogeometric 解析がさかんに行われている．これは幾何形状と，微分方程式の解の補間に用いる基底関数を，CAD で用いられるNURBS関数で置き換えようとするものである．この方法を境界積分法(境界要素法)において用いようとする試みも最近行われているが，我々はこの研究動向に疑問を持っている．その理由は，境界積分法においては特異性を有する核関数と密度関数の積を積分する必要があるが，密度関数の特性を正しく評価しないと，解の精度が非常に悪くなる場合があること，及びisogeometric 解析で行われているように幾何形状と未知関数に同じ基底関数を使ったのでは，解の特性を正しく反映することができないからである．実際，現実の問題では境界形状と解の特性が大きく異なっている問題は少なくない．例えば Laplace 方程式や弾性体の方程式では，境界条件の種類がDirichlet条件からNeumann 条件(またはその逆)に変わる点，クラック先端，複数の材料の界面などでは境界が滑らかでも解に特異性が生ずる場合がある．isogeometric 解析を用いて，この様な解の特異性を表現することは不可能ではないが，少なくとも密度関数に境界形状と同一の近似を用いることが合理的であるとは考えられない．実際，解の特性を反映した計算を行わない限り，境界積分法では解の精度を極限まで向上させることは難しく，ポテンシャル論と数値解析の理論に基づいて，正しい解の挙動を表しつつ，計算コストも精度に見合った解法を選択することが必要であると考えられる．この様な経緯で，従来の isogeometric 境界積分法の研究にとらわれず，精度の向上を図るにはどうすれば良いかを考えるうちに本研究の構想に至った．

２．研究の目的

上に述べたように，幾何形状と未知関数の補間に同一の関数を用いた従来のisogeometric解析に基づく境界積分法には有効性に関する疑問がある．むしろ，幾何形状にはNURBSを用いるとしても，未知関数の補間を廃止し，Nystroem 法を用いた解法がより有効なのではないかと考えられる．そこで，本研究の当初の目的は，境界積分法におけるisogeometric 解析から未知関数のNURBS 補間を廃し，代わりにNystroem 法を用いる手法を実装して，これと通常のisogeometric 境界積分法との性能比較をすることであった．

研究を進めてみると，isogeometric解析の本質は，基底関数の持つべき性質を適切に実現する方法論にあることが理解された．そうすると，isogeometric解析によって得られた基底関数の選択の自由度を積極的に利用することで，従来不可能であった算法が実現できる可能性が見えてきた．この結果，本研究は当初の研究目的にとどまらず，Maxwell方程式の積分方程式の選点法による離散化を実現すると言うもう一つの目的を持つこととなった．

３．研究の方法

(1) Nystroem 法とisogeometric 境界積分法の性能比較

境界形状や境界条件から解が滑らかであることが期待されるとき，同じ精度を出すためにはNystroem 法はisogeometric 境界積分法より多くの未知数を必要とするはずである．しかし計算負荷はNystroem 法の方が軽いものと思われるので，どちらが有利であるか必ずしも自明ではない．そこで，それぞれの解法をできるだけ公平に実装して性能比較を行う．原理的な研究であるので，あまり複雑な問題を避け，研究対象は2次元Laplace方程式における積分方程式とする．

(2) Maxwell方程式の積分方程式の選点法とisogeometric解析を用いた離散化

Maxwell方程式の積分方程式は超特異性を有している上，未知関数は関数空間H_{div}に属しており，RWGなどの一般的に用いられる基底関数は接線方向に不連続性を有する．このような枠組みではEFIEは要素境界において発散し，選点法では要素境界に選点を置くことが自然であるため，選点法を用いた離散化は困難である．このため，Maxwell方程式の積分方程式は伝統的にGalerkin法によって離散化されてきた．しかし，isogeometric解析によって生成したH_{div}の基底による離散化方程式は，滑らかな境界においては発散しないようにできる．このことを利用して，Maxwell方程式の積分方程式を選点法で離散化し，従来のRWGとGalerkin法を用いた算法との性能比較を行う．解析対象はPECとし，積分方程式はEFIEとMFIEを考える．

４．研究成果

(1)Nystroem法と isogeometric 境界積分法の性能比較

2次元円形領域に対するDirichlet問題を1重層ポテンシャルを用いて解いた．Dirichletデータは定数である．Nystroem法にはAlpertの方法[1]を用い，Alpertの積分公式の次数は2および16とする．積分点は500点取った．一方，isogeometric解析においては，境界，未知

関数とも 2 次の B spline 関数を用いて離散化した．数値積分は Gauss 積分であり，特異積分は変数変換を用いて評価した．解析結果を境界での密度関数の数値解の L^2 相対誤差で比較した．結果は Nystroem 法では

積分公式の次数が 2 のとき 3.4973580777217388E-009

16 のとき 1.1524888524817873E-013

となった．一方，isogeometric 解析では 500 自由度でも L^2 相対誤差は 6.5538831958550020E-006 となり，Nystroem 法の方が同じ分割数の場合は圧倒的に高精度であることが結論された．以上のことから，当初の予想のように未知関数と境界形状に同一の基底関数を用いた isogeometric 解析の有用性は認められなかった．

(2) Maxwell 方程式の積分方程式の選点法と isogeometric 解析を用いた離散化

上記のように，通常の意味における isogeometric 境界積分法にはあまり有用性は認められなかった．しかし，この方法論によって基底関数を合理的に構成できる点は魅力的であり，その特色を生かせる算法が構成できるのであれば，これを追求した方が当初考えた研究計画をそのまま進めるより有意義であると考えられた．幸い，Maxwell 方程式の積分方程式の選点法による離散化の着想を得たので，当初計画を変更してこの可能性について検討を行なった．

完全導体による電磁波の散乱問題は，EFIE，MFIE，CFIE などの積分方程式を用いて解くことができるが，一般に，MFIE は良条件でありながら精度上の問題があり，超特異性を有する EFIE や CFIE が好んで用いられてきた．しかし，これらの積分方程式では超特異性を扱うことの困難さから Galerkin 法を用いることが一般的であった．もし選点法を用いることができるのであれば，解析効率の向上が見込まれ理論的にも実用的にも利するところが大きいものと考えられる．PEC に対する Maxwell 方程式の積分方程式では未知関数は表面電流であり，H_{div} に属する関数である．一方，isogeometric 解析を用いて H_{div} 関数を生成することは Buffa ら[2]によって行われており，これを用いた Galerkin 法に基づく isogeometric 境界積分法は Simpson ら[3]によって行われている．本研究では Buffa らの H_{div} 基底関数の次数を 2 次以上に取ると，EFIE，MFIE，CFIE などの積分方程式において選点法が可能であることを示した．またその実装は，散乱体がトーラスと同相な場合非常に簡単になる．

以下数値結果を示す．まず，散乱体がトーラス

$$x_1 = (a + b\ \cos\theta)\cos\varphi\,, x_2 = (a + b\ \cos\theta)\sin\varphi\,, x_3 = b\sin\theta$$

で表される場合を考える．ここに，$a = 3, b = 1$とする．入射波はx_1方向に進み偏波方向がx_3軸である平面磁場である．図 1 に波数$k = 0.1$のときの表面電流の1成分の実部を$(x_1,\ x_2)$の関数としてplot した．数値計算においては，開発したisogeometric選点法（以下IG法と呼ぶ）をEFIEとMFIEに適用した．線型方程式の解法はGaussの消去法であり，いずれの計算においても高速解法や並列化は用いていない．分割数は(θ, φ)方向共に30とした．また，比較に用いたRWG を使った数値結果は，低周波破綻に対応したEFIEに基づくmoment法を用いて求めた．使用した要素数は11250，未知数の数は16875である．同図よりEFIEのによる結果とGalerkin法とRWGを用いた従来法の結果はよく一致しており，EFIEを用いたIG法は従来法より遥かに効率が良いことがわかる．一方，MFIEの孔の側の値が他と若干異なっていることもわかる．

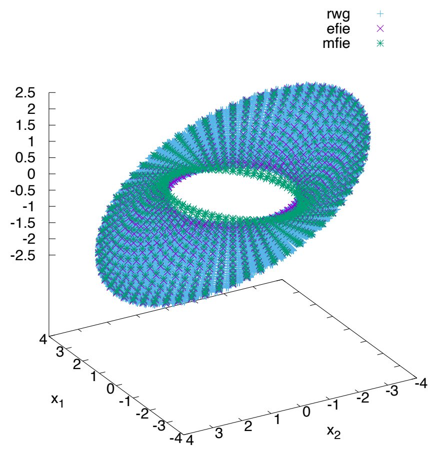

図 1 ：IG 法(EFIE，MFIE)と従来法(RWG)の結果の比較．$k = 0.1$．表面電流実部の第 1 成分

しかし，分割数を両方向共に 75 に変更すると，IG 法は EFIE， MFIE 共に従来法とよく一致するようになり，MFIE の精度の悪化はよく知られた低周波における MFIE の漸近挙動に関係していることが結論される．次に，同じ結果を$k = 1$の場合について求めた結果を図 2 に示す．同図では

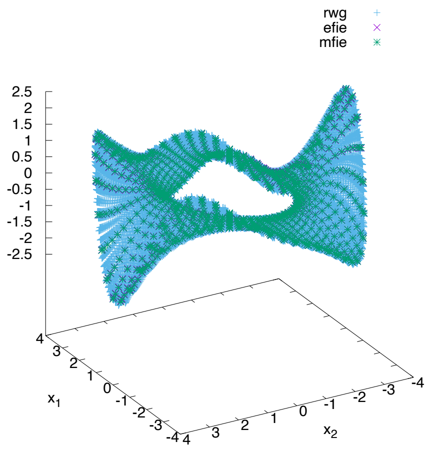

図２：IG 法(EFIE, MFIE)と従来法(RWG)の結果の比較. $k = 1$. 表面電流実部の第１成分

EFIE,MFIE 共に従来法とよく一致しており，低周波問題以外では MFIE の精度の悪化は見られないことががわかる.

次に，トーラスに同相ではない完全導体による波動散乱問題の例として，平板による散乱問題を考える. 縁を有する散乱体においては，表面電流の接線成分は境界において強い特異性を有し，高精度の解析を行うためにはその挙動を正しく表現できる基底を用いることが重要であると考えられる. ここでは第一近似として，表面電流の接線成分が境界において有限の大きな値を取るものとして解析を行った. 図３には上方から平面電場（偏波方向はx）が入射したときの平板(サイズは1×0.7 $(x \times y)$)上の表面電流の絶対値をプロットした. $k = 10$とした.

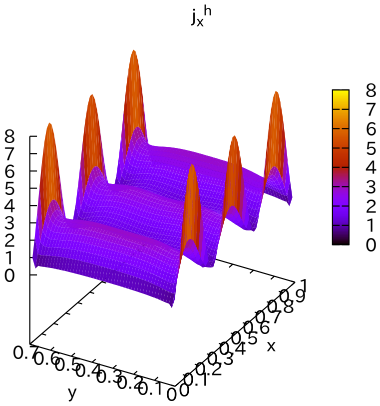

図３：平板の表面電流. IG 法(50x50 分割)

得られた結果は Hongo and Serizawa の結果[4]とよく一致していることを確かめた.

これらの計算結果から，IG 法は Maxwell 方程式の積分方程式を選点法で離散化するための方法として非常に有効であることがわかった.

[1] B. K. Alpert, Hybrid Gauss-trapezoidal quadrature rules, SIAM J. Sci. Comput., 20 (1999), pp. 1551-1584.

[2] A. Buffa, G. Sangalli and R. Vazquez, Isogeometric analysis in electromagnetics, B-splines approximation, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 199, 1143-1152, 2010

[3] R.N. Simpson, Z. Liu, R. Vazquez and J.A. Evans, An isogeometric boundary element method for electromagnetic scattering with compatible B-spline discretizations, J. Comp. Phys., 362, 264-289, 2018

[4] K. Hongo and H. Serizawa, Diffraction of electromagnetic plane wave by a rectangular plate and a rectangular hole in the conducting plate, IEEE Trans. Antennas Propagation, 47, 1029-1041, 1999

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 西村 直志，新納 和樹	４．巻 19
２．論文標題 Maxwell方程式におけるisogeometric境界積分法と選点法による離散化	５．発行年 2019年
３．雑誌名 計算数理工学論文集	６．最初と最後の頁 91-94
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 ―

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	新納　和樹 (Niino Kazuki) (10728182)	京都大学・情報学研究科・助教 (14301)	
研究分担者	吉川　仁 (Yoshikawa Hitoshi) (90359836)	京都大学・情報学研究科・准教授 (14301)	