

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：12601

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間：2019～2022

課題番号：18KK0380

研究課題名（和文）線形表現の高次元変形による本質的曲面の分布と複雑さの研究

研究課題名（英文）High dimensional deformations of linear representations and distribution and complexity of essential surfaces

研究代表者

北山 貴裕（KITAYAMA, Takahiro）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：10700057

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 12,000,000円

渡航期間： 13ヶ月

研究成果の概要（和文）：基本群の線形表現の変形とそれに伴う位相不変量の振る舞いから、3次元多様体を本質的に分解するような部分曲面の分布と複雑さを究明することに取り組んだ。本研究では、ねじれAlexander多項式に関して、Thurstonノルムが一様に捉えられることを3次元多様体の基本群を含むある群のクラスに一般化し、結び目の間にリボンコンコードが存在するための障害を与えた。Blanchfield形式に関して、結び目の Gordian距離の下からの評価を与え、位相的整4次元種数を記述する公式に別証明を与えた。また、数論的トポロジーの見地から、結び目群の表現の普遍変形に付随する代数的p進L関数の類似物を導入した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、線形表現のなす空間の幾何学の低次元トポロジーへの応用を基礎付けるとともに、当研究領域の育成を図るものである。本研究によって、表現に付随する位相不変量による3次元多様体のトポロジーの理解が進展し、それら不変量の新たな応用が提示された。また、本研究は4次元トポロジーと数論的トポロジーとも関わる研究へと展開した。レーゲンスブルク大学におけるStefan Friedl氏との共同研究を通じて、当該分野における今後の国際的連携の基盤構築に繋がる学术交流を深めることができた。

研究成果の概要（英文）：We studied deformations of linear representations of the fundamental group and corresponding behaviors of topological invariants in order to describe distribution and complexity of subsurfaces essentially decomposing a 3-manifold. On twisted Alexander polynomials we showed for a certain class of groups including 3-manifold groups a generalization of the fact that the Thurston norm is uniformly detected, and discovered an obstruction for two knots to be ribbon concordant. On the Blanchfield form we gave a lower bound on the Gordian distance of knots, and presented another proof for a formula of the topological integral 4-ball genus. From the point of view of arithmetic topology we introduced analogues of algebraic p-adic L-functions associated with universal deformations of representations of a knot group.

研究分野：位相幾何学

キーワード：3次元多様体 位相不変量 表現 交叉形式

## 様式 F - 19 - 2

### 1. 研究開始当初の背景

3次元多様体論において、多様体を本質的に分解する部分曲面(本質的曲面)を見つけることは基本的な問題で一般に難しい。先行研究において、研究代表者らは従来の2次元表現の理論を高次元化することに成功し、3次元多様体内の全ての本質的曲面は、ある $n$ について、およそ基本群の $n$ 次元表現(の同値類)のなす空間である $SL_n$ -指標多様体の無限遠点から構成されることを発見していた。

本研究課題の基課題「高次元線形表現のモジュライ空間と3次元多様体の分解」(18K13404)の目的は、この高次元化された対応関係の詳細を解明することで、高次元線形表現の空間の幾何学を低次元トポロジーに応用する基礎を固めることであった。基課題では、主な課題として、2次元表現の場合に既知の諸成果の拡張性、指標多様体上の関数と当理論の関係、高次元化したことで初めて現れる数理を追究し、多様体の境界部分への表現空間の制限と表現空間上の関数を与えるトーシオン不変量に関する成果を上げていた。

### 2. 研究の目的

本研究課題では、表現の次元の変化に伴う表現空間に係る不変量と関数の振る舞いに新たに着目することで、3次元多様体の本質的曲面を巡る当分野が解決すべき発展的課題である次の二つを追究することを目的とした。

(1)本質的曲面の境界となるループ(境界スロープ)の全体集合を決定する。基課題では、2次元表現の場合に既知の不変量をモデルに、多様体の境界への $SL_n$ -指標多様体の制限を記述する不変量を構成し、 $SL_3$ -指標多様体の場合に具体例で計算する研究を行っている。この研究で定めた $SL_n$ -A多様体を応用して境界スロープの全体集合を捉える。

(2)多様体の1次コホモロジー類に対して、それを(ポアンカレ双対として)代表する本質的曲面全体の複雑さを測った量であるThurstonノルムを決定する。1次コホモロジー類と線形表現に付随して多項式を定めるトーシオン不変量は、 $SL_n$ -指標多様体上の関数を誘導するが、基課題では、当関数の多様体の貼り合わせに関する公式を与え、当関数の性質から無限遠点に対応する本質的曲面を制限する研究を行っている。この研究で得た知見から、幾何学的表現のトーシオン不変量の高次元変形によってThurstonノルムを記述する。

### 3. 研究の方法

(1) $SL_2$ -A多様体の定義多項式のNewton多面体から一部の境界スロープを記述できることが知られている。この類似的拡張として、 $n$ が3以上の $SL_n$ -A多様体のトロピカル化として定まるユークリッド空間内の多面体から境界スロープを構成することを試みた。本質的曲面と無限遠点との対応理論から、 $n$ を十分大きくすることで、当多面体が境界スロープの全体集合を捉えることが期待される。予備命題として、対応する本質的曲面の境界スロープが定める指標多様体上の正則関数が無限遠点において収束することを示した。

(2)トーシオン不変量の多項式次数とThurstonノルムが等価となる線形表現の存在性が知られている。等長変換群の $n$ 次元既約表現とホロノミー表現との合成に付随する不変量の集合がThurstonノルムを決定するような、3次元双曲多様体のクラスを構成することを試みた。FriedlとLueckによって導入された関数解析的なトーシオン不変量である $L^2$ -AlexanderトーシオンはThurstonノルムを捉えることが知られている。 $L^2$ -Alexanderトーシオンを上記の集合の適切な極限として表すことを目指した。一般に、絶対値が1の特殊値に対して表示が正しいことを確認した。

### 4. 研究成果

(1) $L^2$ -Alexanderトーシオンは多項式型のトーシオン不変量である。Stefan Friedl氏との共同研究において、我々はある群のクラスに対して $L^2$ -Alexanderトーシオンの次数はある線形表現に付随するトーシオン不変量によって1次コホモロジー類に関して一様に捉えられることを示した。これは、特別な場合として、ねじれAlexander多項式がThurstonノルムを捉えることを示したFriedl, Nagel, Vidussiによる先行結果を、より強い形に置き換えるものである。

(2)近年、二つの結び目の間の特別なコンコーダンスであるホモトピーリボンコンコーダンスと呼ばれる概念についての研究が進んでいる。Stefan Friedl氏、Lukas Lewark氏、Matthias Nagel氏、Mark Powell氏との共同研究において、我々はホモトピーリボンコンコーダンスが存在するためのねじれAlexander多項式に関する障害を与えた。これは、古典的なAlexander多項式に関するFriedlとPowellの先行結果を一般化するものである。応用として、我々はSeifert形式では捉えられないホモトピーリボンコンコーダント関係上の差異が存在する結び目の無限族を構成することにも成功した。

(3) Stefan Friedl 氏、Alexander Neumann 氏、鈴木正明氏との共同研究において、3次元球面内の結び目の Gordian 距離のねじれ Blanchfield 形式による下からの評価を与えた。特に、二つの結び目に対して、一方の結び目ともう一方の結び目の鏡像の向きを反転したものと連結和のねじれ Blanchfield 形式を考える。これは Borodzik と Friedl による代数的結び目解消数に関する先行結果を一般化するものである。更に、我々はこの評価を用いて、最小交点数が 10 以下である幾つかの素な結び目の間の Gordian 距離を決定することに成功した。

(4) 結び目の位相的整 4 次元種数は、結び目を境界に持ち、補空間の基本群が無限巡回群であるような、4次元球体に局所平坦に埋め込まれた曲面の最小種数である。Feller と Lewark は、結び目の位相的整 4 次元種数の 2 倍が、変数  $t$  に 1 を代入して得られる行列の符号が 0 であるような、Blanchfield 形式の表現行列の最小サイズに等しいことを示した。Stefan Friedl 氏と Mark Powell 氏との共同研究において、我々は、Freedman と Quinn の球面埋め込み定理を用いて、Feller と Lewark の定理のより直接的な別証明を与えた。これは結び目の位相的 4 次元種数をねじれ Blanchfield 形式によって理解するより発展的な研究への足掛かりになるものである。

(5) 森下昌紀氏、丹下稜斗氏、寺嶋郁二氏と共同研究において、まず、数論における随伴 Selmer 加群の双対のトポロジーにおける類似として、結び目群の  $SL_2$ -表現の普遍変形に対する随伴ホモロジー-Selmer 加群を導入した。次に、この随伴ホモロジー-Selmer 加群が有限生成トーション加群であることを示した。更に、代数的  $p$  進  $L$  関数の類似である当加群の Fitting イデアルについて、幾つかの計算例を提示することができた。当研究は、数論的トポロジーの観点から、表現に付随する不変量の新たな理解を図ったものである。

新たな展開として、基本群の表現に付随する不変量の 4 次元トポロジーへの応用研究と数論的トポロジーの観点からの研究を進展させることができた。上記に加えて、Thurston norm の研究に関するサーベイ論文を執筆し、指標多様体の幾何学の 3 次元多様体のトポロジーへの応用についての解説記事をまとめた。

また、渡航先であるレーゲンスブルク大学で開催された Low-Dimensional Topology Workshop 及び Global Analysis Seminar において講演し、Seminar on foundations in 3-manifold topology において、円周上の曲面束であるような有限被覆空間を持つ 3 次元多様体についての講義を行うなど、当該分野における今後の国際的連携の基盤構築に繋がる学术交流を深めることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takahiro Kitayama	4. 巻 -
2. 論文標題 A survey of the Thurston norm	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 In the Tradition of Thurston II	6. 最初と最後の頁 149-199
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-97560-9_5	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, Yuji Terashima	4. 巻 -
2. 論文標題 On adjoint homological Selmer modules for $SL_2$ -representations of knot groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnac255	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Stefan Friedl, Takahiro Kitayama, Lukas Lewark, Matthias Nagel, Mark Powell	4. 巻 74
2. 論文標題 Homotopy ribbon concordance, Blanchfield pairings, and twisted Alexander polynomials	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1137-1176
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/S0008414X21000183	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hara Takashi, Kitayama Takahiro	4. 巻 213
2. 論文標題 Character varieties of higher dimensional representations and splittings of 3-manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 433-466
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-020-00590-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Takahiro Kitayama
2. 発表標題 Torsion polynomial functions and essential surfaces
3. 学会等名 Se'minaire GT3, Institut de Recherche Mathe'matique Avance'e (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 北山貴裕
2. 発表標題 リボンコンコードダンスとねじれAlexander多項式
3. 学会等名 N-KOOKセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 北山貴裕
2. 発表標題 Ribbon concordance and twisted Alexander polynomials
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takahiro Kitayama
2. 発表標題 Representations of fundamental groups and 3-manifold topology
3. 学会等名 理化学研究所数理創造プログラム数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Kitayama
2. 発表標題 Character varieties and essential surfaces
3. 学会等名 Low-Dimensional Topology Workshop 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Kitayama
2. 発表標題 Twisted Alexander polynomials and $L^2$ -Euler characteristics
3. 学会等名 Global Analysis Seminar, University of Regensburg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

北山研究室ホームページ  
[https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kitayama/index\\_j.html](https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kitayama/index_j.html)

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	フリードル ステファン  (Friedl Stefan)	レーゲンスブルク大学・Facultät fuer Mathematik・W2 Professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	レーゲンスブルク大学			
スイス	スイス連邦工科大学チューリッヒ校			
英国	ダラム大学			