

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 4月12日現在

機関番号：32675

研究種目：基盤研究（S）

研究期間：2007～2011

課題番号：19104001

研究課題名（和文） モジュライと代数的サイクルをめぐる代数多様体の数論

研究課題名（英文） Study on algebraic varieties related to moduli spaces and algebraic cycles

研究代表者

桂 利行（KATSURA TOSHIYUKI）

法政大学・理工学部・教授

研究者番号：40108444

研究成果の概要（和文）：代数多様体は、いくつかの多項式の共通零点として定義される図形であり、数学の基本的な研究対象である。本研究では、標数が $p > 0$ の世界で、代数多様体を研究し、 a -数、 b -数、 h -数という不変量を定義して、それらの間の関係を明らかにし、応用を与えた。また、標準束が自明である $K3$ 曲面という代数多様体を標数 2、3 で考察し、超特殊と言われる場合に、その上の非特異有理曲線の配置の様子を解明し、格子の理論と関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Algebraic variety is the geometric object which is defined by some polynomials. It is a fundamental object to study in mathematics. In our research, we studied algebraic varieties in characteristic $p > 0$, and we defined the notions of a -number, b -number and h -number. We made clear the relations between them, and gave some applications. We also studied superspecial $K3$ surfaces in characteristic 2, and 3. We gave interesting configurations of non-singular rational curves on them and determined the relation between the configurations and the lattice theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	13,500,000	4,050,000	17,550,000
2008年度	15,800,000	4,740,000	20,540,000
2009年度	12,500,000	3,750,000	16,250,000
2010年度	15,800,000	4,740,000	20,540,000
2011年度	13,300,000	3,990,000	17,290,000
総計	70,900,000	21,270,000	92,170,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

1. 研究開始当初の背景

代数多様体を理解しようとする時、代数多様体を分類するというのは大変有力な方法である。分類の指標としては、離散的な不変量と連続的なパラメータがある。離散的な不変量を用いる分類は双有理幾何学として、森重文、川又雄二郎らによって研究されている。

連続的なパラメータの理論はモジュライ空間の理論として、1960年代に D. Mumford によって厳密な一般論が作られた。それはしばしば代数多様体の構造を持ち、代数幾何の重要な研究対象となっている。また、どのような部分多様体がどのくらい存在するかという問題も基本的な問題である。部分多様体の

形式的な有限和を代数的サイクルといい重要な研究対象となっている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、次のような課題を研究することである。

- (1)代数多様体のモジュライ空間の研究。特に、狭義の Calabi-Yau 多様体とそのモジュライ空間の研究。2次元の場合として、偏極 K3 曲面のモジュライ空間の研究。
- (2)志村多様体の代数幾何的研究。アーベル多様体とそのモジュライ空間の研究。
- (3)広義の Calabi-Yau 多様体をファイバーとするファイバー空間の研究。
- (4)代数的サイクルの構造の研究。特にモジュライ空間の代数的サイクルの研究。

3. 研究の方法

代数幾何学や数論をめぐる数多くの研究集会、シンポジウム、国際会議などを開催し、分担者・海外共同研究者を中心に、多くの研究者の協力を得て、情報を収集し、幅広い代数幾何の見地から総合的に研究を進めた。とくに、分担者金銅誠之名大教授とは、密接な連絡をとり、K3 曲面に関する共著論文を作成した。海外共同研究者 G. van der Geer とは、e-mail による議論とともに互いに訪問することにより密接な討論を経て共著論文を完成させた。

4. 研究成果

研究代表者は、海外共同研究者 G. van der Geer との共同研究として、正標数の代数多様体の不変量である a -数、 h -数の概念を一般化し、さらに b -数を定義し、それらの不変量の関係をあきらかにした。新しく定義した a -数は F. Oort が群スキーム α_p を用いて定義したものとアーベル多様体に対しては一致する。新しく定義した h -数は、代数多様体の n 次の Artin-Mazur 形式群が pro-representable ならば、その形式群の高さと一致する。 b -数は h -数と幾何学的種数の和として定義される。カラビ・ヤウ多様体とそのモジュライ空間への応用として、rigid であれば h -数は 1 か無限大のいずれかになることが示せる。具体的な例として、Fermat 曲面の a -数を計算した。また、研究代表者は分担者金銅誠之との共同研究として、標数 3 の代数的閉体上定義された超特殊 K3 曲面上の代数的サイクルを研究し有理曲線のな configuration として $(16)_{\{10\}}$ -configuration が存在することを示した。複素数体上の単純なアーベル曲面から作られるクンマー曲面の場合には 1907 年に同様の configuration が存在することを Traynaud が示している。点と有理曲線のなすものとして $(280_4, 112_{\{10\}})$ -configuration が存在す

ることも示せる。これらの結果は Leech 格子と関係しており、K3 曲面の Picard 格子に 112 個の Leech ルートが存在することと対応している。標数 2 においては超特殊 K3 曲面上に、 21_5 -symmetric configuration を幾何学的に構成した。

分担者金銅は、3 次曲面に付随した 4 次曲面の周期理論からモジュライ空間を IV 型有界対称領域の算術商として記述されることに着目し、保型形式を用いた研究を行い、保型形式と 3 次曲面の幾何学的不変式との新たな関係を見いだした。また Coble 曲面や nodal Enriques 曲面のモジュライ空間の未解決であった有理性の証明に成功した。向井は、ルート不変量として E7 型格子をもつ Enriques 曲面の定義方程式を調べ、モジュラー不変量を用いて標準的楕円曲面の定義方程式として書き下した。また、Enriques 曲面の Mathieu 型の極大 semi-symplectic 有限群作用についても調べ、ルート不変量を用いて、自己同型群が almost abelian な Enriques 曲面を分類した。また、K3 曲面のモジュライの単有理性の論文を公開した。斎藤秀司は、加藤予想という数論的な問題を解決し、その応用として (X, x) が商特異点の場合に、特異点解消の例外因子の形状を組み合わせ論的に記述する CW 複体が可縮であることを示した。斎藤毅は、射影空間内の偶数次元の非特異超曲面の中間次元のエタール・コホモロジーへのガロワ作用の行列式が定める定義体のガロワ群の指標を、定義方程式の判別式を用いて決定した。偶数次元多様体の中間次元のエタールコホモロジーの第 2 Stiefel-Whitney 類に関する予想を定式化し多くの場合に証明した。石田は、トーリック型のカusp 特異点の局所環を有限生成でない半群環の部分環として考え、多項式環や冪級数環でグレブナー基底を考えると同様に、単項式順序を考え局所環の元の先頭項全体からなる部分半群を考察した。これが有限生成であれば生成元を与える局所環の元の有限集合がグレブナー基底あるいは SAGBI 基底に相当するが、カusp 特異点を定義する群の作用が鏡映群でない限りあり得ないことを示した。石井は、jet schemes 間の同形と多様体間の同形の関連性を調べ、jet scheme の幾何学的性質： \mathbb{Q} -Gorenstein 性、局所完全交差性、標準特異点、終着特異点、対数的標準特異点を持つならば多様体もその性質を持つということを示した。また、jet schemes がすべて高々有理特異点しか持たないが多様体は特異点を持っているというこれまでの予想に反する例を体系的に作った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 52 件)

- (1) G. van der Geer and T. Katsura, Relations between some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 62 (2013), 111-125, DOI 10.1007/s12215-013-0112-z, 査読有
- (2) T. Katsura and S. Kondo, Rational curves on the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3, *J. Algebra*, 352 (2012), 299-321, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.047, 査読有
- (3) T. Katsura and S. Kondo, A note on a Supersingular K3 surface in characteristic 2, "Geometry and Arithmetic" (C. Faber, G. Farkas, R. de Jong, eds.), *European Mathematical Society*, 2012, 243-255, 査読有
- (4) M. Kerz and S. Saito, Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes, *Publ. Math. IHES.*, 115(2012), 123-183, DOI: 10.1007/s10240-011-0038-y, 査読有
- (5) S. Mukai, Kummer's quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, *J. Math. Soc. Japan* 64 (2012), 231-246, DOI:10.2969/jmsj/0641023, 査読有
- (6) Shigeyuki Kondo, Moduli of plane quartics, Goepel invariants and Borchers products, *International Mathematics Research Notices*, vol. 2011, No.12 (2011), 2825-2860, DOI:10.1093/imrn/rnq190, 査読有
- (7) S. Ishii, Geometric properties on jet schemes, *Comm. Alg.* 39 (2011), 1872-1882, DOI:10.1080/00927872.2010.480954, 査読有
- (8) I. Nakamura, Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties, *Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces* (I. Nakamura and Lin Weng eds., Sapporo 2007), *Advanced Studies in Pure Mathematics* vol. 58, *Mathematical Society of Japan*, 2010, pp.69-135. 査読有
- (9) Matsumoto, Keiji; Terasoma, Tomohide, Arithmetic-geometric means or hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties, *Internat. J. Math.* 21 no. 7 (2010), 939-949, DOI:

10.1142/S0129167X1000632X, 査読有

- (10) K. Kato and T. Saito, Ramification theory for varieties over a perfect field, *Annals of Mathematics*, 168 (2008), 33-96. 査読有

[学会発表] (計 156 件)

- (1) T. Katsura, Configurations of rational curves on the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3, *Workshop on Algebraic Geometry in Positive Characteristic*, May 26, 2011, KIAS, Korea, (招待講演)
- (2) T. Katsura, On a configuration of curves on the superspecial abelian surface in characteristic 3, 2011 Taiwan-Japan Workshop on Arithmetic Algebraic Geometry and Related Topics, 2011年11月17日, Academia Sinica, Taiwan, (招待講演)
- (3) S. Mukai, Enriques surfaces and root systems, *Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau Threefolds*, August 20, 2011, The Fields Inst. Res. Math. Sci., Toronto, Canada, (招待講演)
- (4) S. Mukai, K3 surfaces of genus 17, "Moduli Spaces", Isaac Newton Inst. for Math. Sci., April 12, 2011, Cambridge, UK, (招待講演)
- (5) Shigeyuki Kondo, The moduli spaces of hessian quartic surfaces, Enriques surfaces, and automorphic forms, "Automorphic forms and Moduli spaces 2011", October 10, 2011, CIRM, Luminy, France, (招待講演)
- (6) S. Ishii, Applications of arc spaces to birational geometry I, II:, *Workshop Artin Approximation and Arcs.*, 2011年11月19日, 11月20日, Ervin Schlessinger Institut, Vienna, Austria, (招待講演)
- (7) T. Katsura, Some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, *Prospects in Mathematics*, September 14, 2010, Trento Univ. (CIRM), Italy, (招待講演)
- (8) T. Katsura, On the configuration of rational curves on the supersingular K3 surfaces in small characteristics, *Conference on Geometry and Arithmetic*, September 23, 2010, Schiermonnikoog, The Netherlands, (招待講演)
- (9) Toshiyuki Katsura, Configurations of rational curves on supersingular K3

surfaces in small characteristics, Seoul-Tokyo Conference on Arithmetic and Algebraic Geometry, November 26, 2010, KIAS, Seoul, Korea, (招待講演)

- (10) T.Katsura, Invariants of algebraic varieties in positive characteristic, KIAS Seminar, KIAS, March 29, 2010, Korea (招待講演)
- (11) Shigeyuki Kondo, The supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 2, Workshop on elliptic fibrations and K3 surfaces - Berlin, July 16, 2010, the Humboldt Universitaet, Germany, (招待講演)
- (12) Shuji Saito, Cohomological Hasse principle and applications, Invited talk at ICM2010, 2010 August 20, Hyderabad, India, (招待講演)
- (13) Takeshi Saito, Wild ramification of schemes and sheaves, Invited talk at ICM2010, August 27, 2010, Hyderabad, India, (招待講演)
- (14) Shihoko Ishii, Mather discrepancy and arc spaces, Algebraic Geometry and its Applications (Abhyankar's 80th birthday Conference), July 21, 2010, Purdue University, USA, (招待講演)
- (15) Shuji Saito, Equivariant weight homology and McKay correspondence, Regulator III, July 20, 2010, University of Barcelona, Barcelona, Spain, (招待講演)
- (16) Shigeru Mukai, K3 and Enriques surfaces, IMPNGA Summer School on Algebraic Geometry, July 5-8, 2010, Bedlewo, Poland, (招待講演)
- (17) T.Katsura, Invariants of algebraic varieties in positive characteristic, KIAS Seminar, KIAS, March 29, 2010, Korea, (招待講演)
- (18) T.Terasoma, Motivic construction of relative completion, 1st PRIMA Congress, Sydney, July 6, 2009, Australia, (招待講演)
- (19) M. Ishida, Complexes on not necessarily normal toric varieties, 東北復旦代数幾何合同シンポジウム, 東北大学大学院理学研究科数理科学記念館, 2009年11月26日, (招待講演)
- (20) T.Katsura, On the unirationality of Fermat varieties, Conf. of Characteristic p Method in Algebraic Geometry, Drobeta Turnu-Severin, July 15 and 16, 2007, Romania, (招待講演)

[図書] (計1件)

- (1) 桂利行、藤原洋ほか12名の共著, “イン

ターネット数理科学”, ナノオプトニクスエナジー出版局、2010, 序文と pp45-67 および編集を担当。査読無

[その他]

ホームページ等

<http://kat.k.hosei.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

桂 利行 (KATSURA TOSHIYUKI)

法政大学・理工学部・教授

研究者番号: 40108444

(2) 研究分担者

斎藤 毅 (SAITO TAKESHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 70201506

斎藤 秀司 (SAITO SHUJI)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 50153804

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 50192654

向井 茂 (MUKAI SHIGERU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号: 80115641

金銅 誠之 (KONDO MASAYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 50186847

中村 郁 (NAKAMURA IKU)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号: 50022687

石井 志保子 (ISHII SHIHOKO)

東京大学・大学院数理学研究科・教授

研究者番号: 60202933

石田 正典 (ISHIDA MASANORI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30124548

(3) 研究協力者

G. van der Geer

Amsterdam 大学・

Korteweg-de Vries Institute of

Mathematics・教授