様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 5 月 6 日現在

研究種目：基盤研究（Ａ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19204004
研究課題名（和文） 測度距離空間の収束理論とその展開

研究課題名（英文） Convergence theory of metric measure spaces and its development

研究代表者
加須栄　篤（KASUE　ATSUSHI）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：40152657

研究成果の概要（和文）：有限ネットワーク列の極限に現れる空間を、解析的な視点からの特徴付けを行い、Gromov-Hausdorff 収束と De Giorgi の変分収束の両方の視点から有限ネットワーク列の収束理論を展開する。関連して、無限ネットワーク上のレジスタンス形式に関する倉持コンパクト化を研究し、ディリクレ有限調和関数族に関する体系的な研究を行う。

研究成果の概要（英文）：We begin with clarifying spaces obtained as limits of sequences of finite networks from an analytic point of view, and discuss convergence of finite networks with respect to the Gromov-Hausdorff distance and variational convergence after De Giorgi. Relevantly to convergence of finite networks to infinite ones, we investigate the space of harmonic functions of finite Dirichlet sums on infinite networks and their Kuramochi compactifications.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	5,600,000	1,680,000	7,280,000
2008 年度	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2009 年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
年度			
年度			
総　計	15,700,000	4,710,000	20,410,000

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：測度距離空間，エネルギー形式，変分収束，Gromov-Hausdorff 収束，ネットワーク，有効抵抗，リーマン多様体，2-調和写像

１．研究開始当初の背景

M.Gromov によってリーマン多様体の収束，もっと一般に距離空間の収束という概念が導入されて以来，数多くの研究

者によって，リーマン多様体の収束に関する研究がなされ，現在も深化している．たとえばリーマン多様体の極限と収束列の関係，そしてその考察から得られるリーマン多様体自身の構造の解明が，曲率のピンチング条件，上からあるいは下からの有界条件，L^p ノルムに関する有界性，アインシュタイン計量などの性質の理解を大きく前進させた．また，多様体という空間を含むより広い範疇での幾何学の必要性と可能性も，このリーマン多様体の収束理論を通して明らかになりつつあり、他の分野と関わりながら，新たな研究課題を提供している．たとえば，リーマン多様体はその自然な距離を備えた距離空間であると同時に，関数空間上の自然なディリクレエネルギー汎関数による典型的なディリクレ空間である．ディリクレ空間の理論は，確率過程の理論と深く関わりながら以前から研究されており，このような視点やスペクトル幾何の視点からの収束理論の展開は重要な課題である．

一方，いわゆるフラクタル集合も対象として含む測度距離空間上のソボレフ空間の定義とその基本的性質の導出，（対数）ソボレフ不等式，ポアンカレ不等式，熱核評価，放物型ハルナック不等式などの関数不等式に関する研究が，幾何学，実解析学，および確率論を専門とする研究者によって精力的に進められている．

２．研究の目的

Gromov-Hausdorff 収束は距離空間の有限グラフ近似に関するものであるが、本研究において，リーマン多様体や距離グラフを含む重要な測度距離空間からなる集合を，変分原理に基づいた収束の概念，たとえば de Giorgi のガンマ収束理論と，関連する関数不等式を用いて研究し，その応用を目論む．

従来の収束理論では、２次元以上の空間とその極限を対象とし、とくに次元が下がる現象（崩壊現象）に研究の重点が置かれている。この研究では，１次元（より一般に２次元未満の非整数次元）の空間の変分収束も研究する．

具体的には，距離グラフ，あるいはその部分空間，したがって離散的ネットワークも含む空間の族とそれらの上の自然なエネルギー形式から定まるレジスタンス距離（有効抵抗が定める距離）に関する Gromov-Hausdorff 収束およびエネルギー形式の一様位相に関する変分収束を導入し，それらを研究する．実際シェルピンスキーガスケットを代表的例として含むあるクラスの自己相似集合とそのラプラシアンに関する研究が進められているが，本研究では，それらの集合は有限ネットワークの列のレジスタンス距離に関する Gromov-Hausdorff 収束極限であるとして捉え，すでに研究されているある種の自己相似集合を含むより広いクラスのものにラプラス作用素を定義し研究する．

また，固定された有限個の頂点をもつグラフあるいはその上のマルコフ連鎖の列のある種の変分収束が既に導入され，有限グラフ上のシュレーディンガー作用素のスペクトルを用いたグラフの不変量の研究に応用されていること，および距離グラフのスペクトルに関しては，物理現象や化学現象とも関連する問題を含み，様々な研究が行われていることに注目する．それから無限グラフ（ネットワーク）も，有限なもののレジスタンス距離に関する極限であるが，この視

点から無限グラフの解析的なコンパクト化を捉え，さらに非コンパクトリーマンあるいはサブリーマン多様体のグラフによる粗等長近似に関して，新たな問題と手法を提供する．すなわち，本研究では，グラフの(われわれの意味での)変分収束及びスペクトル収束という独自の視点から，グラフのスペクトルおよび幾何的構造やその上のマルコフ連鎖の収束問題などへの新しいアプローチを提供することを目指す．　さらに距離グラフ上の自然なエネルギー形式と測度，およびそれらに付随したラプラス作用素に限らず，頂点での様々な境界条件を満たす作用素に関してもスペクトル収束理論を展開する．

３．研究の方法

いくつかのキーワードに沿って研究の方法について説明する。

(1)有効抵抗- ネットワークには、測地的距離と有効抵抗という２つの距離が定まる。ともにそれぞれに関する等長写像であることとネットワーク同型写像であることは同値である。　したがって測地距離と同様に有効抵抗もネットワークを研究する際の重要な役割をもつものである。とくに有効抵抗はエネルギー形式を決定する。このことから有効抵抗を用いた収束位相を用いた方法を採用する。

(2)スペクトル埋め込み－ネットワーク列やより一般の測度距離空間の列の収束を研究する際、それらを一つの大きな空間に埋め込んで考えることは有効である。本研究では、ラプラス作用素のスペクトル分解にヒントを得て、ヒルベルト空間に距離をコントロールした埋め込みを実行して、その空間内での収束と有効抵抗を用いた収束位相を比較しながら研究する。

(3)倉持境界－スペクトル埋め込みによる無限ネットワークの境界は、実は倉持境界であることが明らかとなった。したがって収束理論を展開する際、倉持境界自身を研究する必要がある。この境界は５０年近く前に研究対象として現れたものであるが、性質や他の境界との関係、具体的例などについて実際あまり多くの研究成果はない。本研究では、この境界の基本的性質を導き、収束極限の解析に応用する。

(4) 擬等長－リッチ曲率が下から一様に有界で、単位球体の体積が一様に正の数で押えられた非コンパクト完備リーマン多様体は、そのネットを考えることによって、ある有界次数の無限グラフと擬等長であることが知られている。擬等長を鍵となるものとして捉え、擬等長写像とディリクレ有限関数の空間の関係あるいは擬等長写像と倉持境界の関わりを明らかにする。

(5) 調和写像とアプリオリ評価－ターゲットがある種の凸性を持つ場合、調和写像のアプリオリ評価が知られている。この事実をもとに調和写像の離散近似を行い、有界次数の無限グラフと擬等長を通して、調和写像の無限遠方での挙動を表現する。

４．研究成果

有限ネットワークの新たな収束理論の構築とその展開として、有効抵抗を用いたGromov の意味での有限ネットワーク列の収束の基本的性質の導出および極限空間の解析を行った。副産物として、より一般的状況でのネットワーク収束の視点から、有名なAlon-Boppana の定理の一般化を行い、その新しい意味を与えた。

　極限空間として現れる無限ネットワーク（可逆マルコフ連鎖）は重要な研究対象であり、この研究において、有限ネットワ

ーク列のマルコフ形式の極限として現れる無限ネットワーク上のマルコフ形式の族について、それぞれに付随する倉持コンパクト化のポテンシャル論的性質をスペクトル埋め込みという新しい方法で解明し、そのコンパクト化の意味を新しく付け加えた。たとえば、Ramanujan グラフ列を利用して、無限正則ツリーに収束する有限グラフの列で、その極限形式が、無限正則ツリーの無限遠点集合に当たる Cantol 集合上の正則ディリクレ形式と結びついているものがさまざまに存在することを初めて明らかにした。

さらに倉持境界とディリクレ有限関数およびランダムウォークとの関係を明確にした。これは、マルチン境界と正値調和関数およびランダムウォークに関するドゥーブによる古典的結果に対応するもので、今後の研究に基本的な役割を果たすと考えられる。また、ディリクレ有限関数だけではなく、ディリクレ有限写像にも適応でき、これによって距離空間、とくにアレキサンドロフの意味での非正曲率空間をターゲットとしたエネルギー有限な写像の無限遠点での挙動に関する、従来の方法では得られない新しい知見を与えた。さらに非コンパクトリーマン面の三角形分割に現れる無限グラフを考えるとき、三角形分割によるグラフの実現をグラフからリーマン面へのディリクレ有限写像と考えることができ、リーマン面のディリクレ有限な等角写像の理論の離散版構築へのひとつの道筋を与えたことになる。

研究課題の一つである非線形作用素の変分収束に関して、調和写像の拡張である２－調和写像を考察し、これに関する変分収束理論展開のためのアプリオリ評価の導出を目論んだ第一変分公式と第２変分公式を定式化するなど基礎的な研究を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

[1] T. Hattori and A. Kasue, Functions of finite Dirichlet sums and compactifications of infinite graphs, Advanced Studies in Pure Math.57, 2010, Probabilistic Approach to geometry, 141-153, 査読有

[2] A. Kasue, Convergence of metric graphs and energy forms, Revista Matematicae Iberoamericana 26-2 (2010), 367-448, 査読有

[3] T. Ichiyama, J.Inoguchi ,H.Urakawa, Classification and iso- lation phenomena of bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields, Note di Matematica, 2010（発表受理, 印刷中）, 査読有

[4] T. Ichiyama, J. Inoguchi ,H.Urakawa, Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields, Note di Matematica, Vol. 28 (2009), 233-275, 査読有

[5] T. Hattori and A. Kasue, Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds, Proc. Japan Acad.83 Ser.A (2007), 129-134, 査読有

〔学会発表〕（計10件）

[1] 加須栄篤、ランダムウォークとディリクレ有限写像、リーマン幾何と幾何解析、2010 年２月 19 日, 筑波大学自然系学系(茨城県)

[2] 加須栄篤,ランダムウォークとディリクレ有限写像、測地線及び関連する諸問題、2010 年 1 月 9 日, 熊本大学教育学部(熊本

県)

[3] 加須栄篤, ネットワークの有効抵抗と収束, 第６回離散幾何解析セミナー, 2009年７月３日, 京都大学理学部(京都府)

[4] A.Kasue, Harmonic Functions of finite Dirichlet integrals, The 4th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, December 24, 2008 (China)

[5] H.Urakawa, Biharmonic maps into compact Lie groups and the integrable systems, In: International conference on Harmonic Maps—in honor of sixtieth birthday of Professor John Wood, September, 8, 2009, Cagliari University, (Italy)

[6] A.Kasue, Functions of finite Dirichlet sum and compactifications of infinite graphs, The 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年８月６日, 京都大学 (京都府)

[7] H.Urakawa, Conformal geometry, harmonic maps and biharmonic maps, In: International conference on "Conformal Geometry: Invariant theory and the variational method", July, 2, 2008, Roscoff (France)

[8] A.Kasue, (1) Covergence of metric graphs and energy forms, (2) Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds, Workshop: Variational problems, Geometry and Global Analysis, 2007年11月9日-10, 東北大学情報科学研究科(宮城県)

[9] 浦川肇, Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields—新しい変分問題、2007年8月24日、第54回幾何学シンポジウム、鹿児島大学(鹿児島県)

[10] H.Urakawa, Biharmonic maps and bi-Yang-Mills fields, June, 13, 2007. In: International conference "ADVANCES IN DIFFERENTIAL GEOMETRY" in honor of Professor Oldrich Kowalski, Lecce (Italy)

〔図書〕(計 1 件)

[1] 浦川肇、朝倉書店、ラプラシアンの幾何学と有限要素法、2009年、264ページ

６．研究組織

(1)研究代表者
加須栄　篤 (KASUE ATSUSHI)
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：40152657

(2)研究分担者
浦川　肇 (URAKAWA HAJIME)
東北大学・情報科学研究科・教授
研究者番号：50022679

(3)連携研究者
納谷　信 (NAYATANI SHIN)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号：70222180
(H.19 ： 研究分担者)

加藤　信 (KATO SHIN)
大阪市立大学・理学研究科・准教授
研究者番号：10243354
(H.19 ： 研究分担者)

久村　裕憲 (KUMURA HIRONORI)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号：30283336
(H.19 ： 研究分担者)

高橋　淳也(TAKAHASHI JUNNYA)
東北大学・情報科学研究科・助教
研究者番号：10361156
(H.19 ： 研究分担者)